Tafelen van Interest (1582)

Henk Hietbrink en Jean-Marie Dendoncker

In dit artikel bespreken we het boek *Tafelen van INTEREST* ([1]), *Midtsgaders De Constructie der seluer, ghecalculeert door Simon Steuin Brugghelinck*. Het boek is uitgegeven door Christoffel Plantijn in Antwerpen in den gulden Passer in het jaar 1582, kort voordat Plantijn een deel van zijn drukkerij overbracht naar Leiden. Stevin woonde toen al officieel in Leiden. Om deze ‘*tafelen*’ voor elkeen duidelijk te maken, stelde Stevin tal van voorbeelden, ‘*Exempelen*’, samen. Zijn oplossingen doen nu uiteraard wat archaïsch aan, maar zijn goed te volgen. Het begrijpen van de aard van de opdrachten, zijn oplossingsmethodes en die omzetten naar een hedendaagse abstract algebraïsche benadering zijn voor onze (economie)leerlingen zinvol en algemeen vormend. In deze context zullen we dan ook een aantal oefeningen aan de lezer voorstellen.

De editie uit 1582 telt 92 pagina’s en staat online bij books.google, maar het lettertype kan voor de lezer een belemmering zijn. In 1937 verscheen een editie in een beter leesbaar lettertype. Die uitvoering staat online bij de Koninklijke Bibliotheek. In 1958 is een editie opgenomen in *The Principal Works*, samen met een moderne, Engelse vertaling. Die versie staat online bij KNAW. In volume IIA wordt de *Tafelen van Interest* uitvoerig besproken ([2]).

1 Opbouw van het boek

Met *De Tafelen van Interest*, begint Stevins wetenschappelijke productie. Het doel van dit boek is om, zoals Simon Stevin het zelf in zijn voorwoord duidelijk maakt, “*de tafelen midtsgaders haere constructien ende ghebruyck ordentelick naar mijn vermogen te verclaeren*”. Zelf refereert Stevin aan het boek *L’ARITHMETIQUE, un petit discours des changes avec l’art de calculer aux Getons* van Jan Trenchant uitgegeven in 1571 in Lyon. Simon Stevin beschouwt Trenchant dan ook als de *inventeur* van de tafelen. Toch voegt hij in zijn nota op pagina 62 er fijntjes aan toe: “*in de zelue Arithmeticque hebbe ick zeker erreur van den interest bemerckt*”. Op die *erreur* (fout) komen we later terug. Het is de verdienste van Simon Stevin dat hij de tafelen gebruiksklaar heeft gemaakt voor de handelaars die ze nodig hadden. Dit is niet onbelangrijk omdat, zoals hij op pagina 7 zelf vermeldt, “*de tafelen hier in Hollandt by eenighe schriftelick zijn, maer als groote secreten by den ghenen diese hebben, verborghen blijuen*”. Het typeert wellicht Simon Stevin dat hij de tafelen voor iedereen toegankelijk wil maken en dat hij ze ook aan de hand van talrijke voorbeelden zal verduidelijken. Hij zet zich af tegen diegenen die de tafelen wensen geheim te houden, omdat de reden om ze geheim te houden *eenichsins een argument te zijne van meerder liefde tot profijt dan tot conste*.

Stevin publiceert in 1582 zijn *Tafelen van Interest* in het Nederlands en drie jaar later een vertaling in het Frans. Na zijn dood worden Franstalige edities verzorgd door Albert Girard. Simon Stevin beschouwt zowel de enkelvoudige interest als de samengestelde interest, die hij respectievelijk *simpel* en *ghecomponeert* noemt en die zowel *schadelick* als *profijtelick* kunnen zijn. Met behulp van zestien *tafelen van interest* van 1 % tot 16 % en van acht *tafelen van interest van de penninck* 15 tot en met 22 geeft Simon Stevin tal van oefeningen, die hij dan oplost.

2 Moderne werkwijze

Net als zijn tijdgenoten maakte Simon Stevin geen gebruik van algebraïsche formules. Ook het concept van gebroken exponenten bestond toen nog niet. Voor de hedendaagse lezer is het wellicht handig om eerst de enkelvoudige en samengestelde interest te definiëren met moderne formules die aansluiten bij hedendaagse leerboeken.

Bij enkelvoudige interest is de interest I evenredig met de beginwaarde van het kapitaal k, de enkelvoudige interestvoet i en het aantal termijnen n waarvoor het kapitaal wordt uitgezet. Je vindt dus:

$$I = k \cdot i \cdot n \tag{1}$$

Is i = 5 % en k = 100 geldeenheden dan zal de interest I jaarlijks 5 geldeenheden bedragen. Na 1, 2, 3, … opeenvolgende jaren zal het kapitaal dan 105, 110, 115, … geldeenheden groot zijn. De formule om het eindkapitaal K te vinden is dan

$$K = k + k \cdot i \cdot n = k\,(1 + i \cdot n) \tag{2}$$

Men spreekt van samengestelde interest wanneer bij het einde van elke periode de interest die recht evenredig is met het kapitaal, niet geïnd wordt, maar bij het kapitaal gevoegd wordt om ook tijdens de volgende perioden zelf interest op te brengen. Is k opnieuw het beginkapitaal dat gedurende n perioden geplaatst wordt aan een interestvoet i per periode, dan zijn de formules voor het eindkapitaal K en de samengestelde interest I:

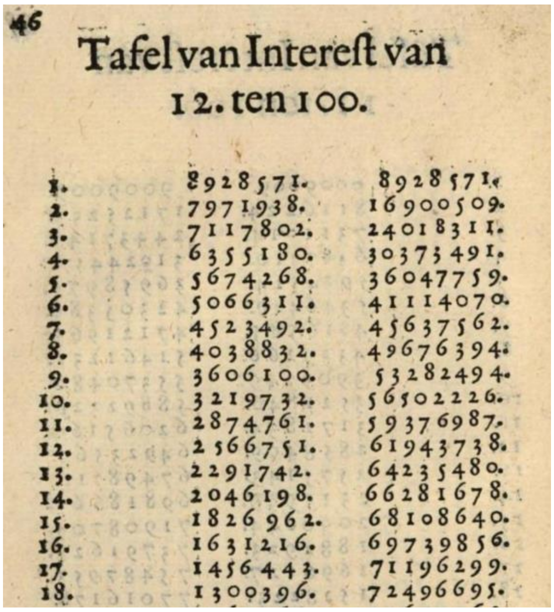
$$\begin{aligned} K &= k(1+i)^n \\ I &= K - k = k\left((1+i)^n - 1\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Dit zijn de gebruikelijke en gekende formules om het eindkapitaal in functie van i en n te berekenen als het beginkapitaal k bekend is. We willen immers meestal weten hoeveel onze spaarcenten na een bepaalde periode zullen opbrengen. Het beginkapitaal (of de aanvangswaarde) wordt soms aangeduid met A, het eindkapitaal (of de slotwaarde) met S.

3 Werkwijze van Simon Stevin

Simon Stevin gebruikt niet de moderne werkwijze waarbij het beginkapitaal uitgangspunt is. Hij vertrekt van het eindkapitaal dat hij steeds de *Hooft-somme* noemt. In zijn Propositie III legt hij minutieus uit hoe hij te werk gaat. Om zo weinig mogelijk breuken in zijn tabellen te verkrijgen, neemt hij als basis voor zijn tabellen steeds het getal 10 000 000 (tien miljoen) die hij de *wortel der tafelen* noemt.

In Figuur 1 staat de tabel van 12 ten 100. Dat is de tafel van rentevoet 12 %. Om het eerste getal van 8 928 571 in de tweede kolom te vinden, vermenigvuldigt hij 10000000 met 100 en deelt hij het resultaat met 112 (100 plus de rentevoet). Na deling is de rest de breuk 48/112 en omdat die minder is dan een half is, rondt hij naar beneden af. Het tweede getal in de kolom is ook interessant. Hier laat Simon Stevin zien dat hij het afgeronde getal 8928571 met 100 vermenigvuldigt en deelt door 112. Zodoende komt hij na afronding uit op 7971938. Wanneer Stevin doorgerekend had met het niet afgeronde getal, dan was hij één hoger uitgekomen, namelijk op 7971939. Voor uw leerlingen is het belangrijk te weten dat Stevin tussentijds afrondt.

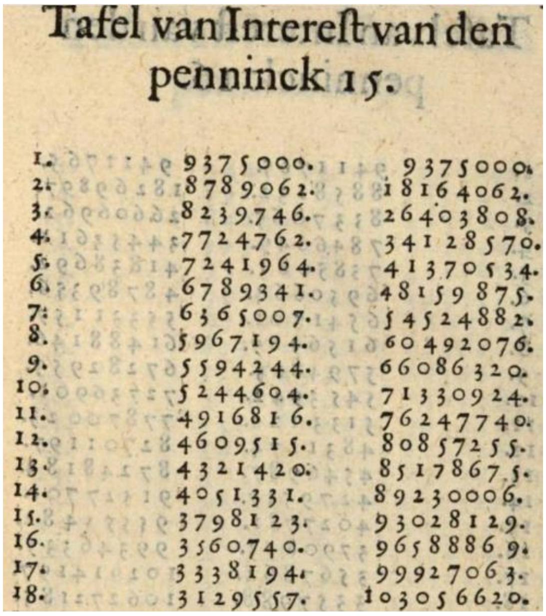


46

Tafel van Interest van 12. ten 100.

1.	8928571.	8928571.
2.	7971938.	16900509.
3.	7117802.	24018311.
4.	6355180.	30373491.
5.	5674268.	36047759.
6.	5066311.	41114070.
7.	4523492.	45637562.
8.	4038832.	49676394.
9.	3606100.	53282494.
10.	3219732.	56502226.
11.	2874761.	59376987.
12.	2566751.	61943738.
13.	2291742.	64235480.
14.	2046198.	66281678.
15.	1826962.	68108640.
16.	1631216.	69739856.
17.	1456443.	71196299.
18.	1300396.	72496695.

Figuur 1: Tafelen [Stevin, 1582], blz 46



Tafel van Interest van den penninck 15.

1.	9375000.	9375000.
2.	8789062.	18164062.
3.	8239746.	26403808.
4.	7724762.	34128570.
5.	7241964.	41370534.
6.	6789341.	48159875.
7.	6365007.	54524882.
8.	5967194.	60492076.
9.	5594244.	66086320.
10.	5244604.	71330924.
11.	4916816.	76247740.
12.	4609515.	80857255.
13.	4321420.	85178675.
14.	4051331.	89230006.
15.	3798123.	93028129.
16.	3560740.	96588869.
17.	3338194.	99927063.
18.	3129557.	103056620.

Figuur 2: Tafelen [Stevin, 1582], blz 51

In Figuur 2 staat de tabel van de penninck 15. Daar vinden we nog een verrassing over afronden. Met de penninck 15 wordt bedoeld dat één penning rente berekend wordt op iedere 15 penningen. Dat komt overeen met $6\frac{2}{3}$ penningen op iedere honderd penningen. De rentevoet is dus $6\frac{2}{3}$ %. Stevin deelt iedere keer door de breuk 16/15 (of vermenigvuldigt met de breuk 15/16). Bij het eerste jaar komt er een mooi geheel getal uit, namelijk 9 375 000. Bij het tweede jaar komt er uit 8 789 062 $\frac{1}{2}$. Verrassing is dat Stevin een half naar beneden afrondt! Volgens Stevin is een beginkapitaal van 8789062 libra na twee jaar tegen de vijftiende penning 10 000 000 libra waard.

Stevin rekent in de tabellen dus uit wat het beginkapitaal is. Dit is mogelijk te verklaren omdat in zijn periode de kapitaalsopbrengsten door samengestelde interest in sommige gevallen als immoreel werden beschouwd. Toch zal Simon Stevin zowel voorbeelden geven van *profijtelicken* als van *schadelicken* interest. Naast de opeenvolgende jaren en de beginkapitalen met eindwaarde 10 000 000 wordt er nog een derde kolom met getallen berekend. Deze getallen zijn de gecumuleerde opeenvolgende beginwaarden voor elk jaar. Dit kan je snel zelf nagaan.

4 Voorbeelden

Misschien vindt u het leuk om eerst zelf te rekenen aan de voorbeelden die Stevin zijn lezers voorschotelde. Hieronder staan enkele opdrachten ([3]). Ze worden verderop in dit artikel uitgewerkt. Aan het einde van het artikel komt nog een reeks oefeningen met oplossingen.

1. Hoeveel schuld heeft iemand bij aanvang als hij na één jaar een bedrag van 300 libra terug moet betalen tegen 12 % enkelvoudige rente per jaar? (Exempel 1 van pagina 20)

2. Hoeveel geeft een bedrag van 320 libra in vijf jaar aan enkelvoudige rente als een bedrag van 27 libra in vier jaar een bedrag van 14 libra geeft? (Exempel 2 van pagina 15)
3. Hoeveel enkelvoudige rente moet iemand na vier jaar betalen als gerekend wordt met 12% rente per jaar wanneer de schuld ieder jaar met een bedrag van 56 libra toeneemt? (Exempel 4 van pagina 17)
4. Hoeveel schuld heeft iemand bij aanvang als hij na drie jaar een bedrag van 32 libra moet betalen tegen jaarlijks de 16de penning enkelvoudige interest? (Exempel 2 van pagina 20)
5. Wanneer is voor de schuldeiser een schuld tegen samengestelde interest meer waard dan diezelfde schuld tegen enkelvoudige interest tegen dezelfde rente op jaarbasis?

Nu in 2020 de rente op spaarrekeningen nagenoeg nul is, lijken rentepercentages als 6 % of 12 % hoog, maar ook nu moeten bedrijven in risicovolle markten 8 % rente of meer betalen. Woekerrente is van alle tijden. De Nederlandse regering heeft pas in mei 2020 de maximale rente op consumptieve leningen verlaagd van 14% naar 10%. Een Nederlandse bank heeft daarop de rente tijdelijk verlaagd naar een schappelijke 9,9%.

Het antwoord op de laatste vraag is voor veel leerlingen een verrassing. Intuïtief verwacht men dat een schuldbedrag altijd het hardst groeit bij rente op rente. Toch levert, bij hetzelfde rentepercentage op jaarbasis, lineaire groei over een periode korter dan één jaar meer op dan rente op rente. Rekent u maar na. Over een halfjaar geeft bij enkelvoudige interest een bedrag van € 32 000 tegen jaarlijks de penning 16 een bedrag aan rente van € 1 000, maar bij rente op rente slechts een bedrag van € 985. Voor Stevin is het verschil principieel groot genoeg om te stellen dat bij een lening over 16,5 jaar de rente eerst berekend moet worden over 16 jaar tegen samengestelde interest en vervolgens over dat halve jaar tegen enkelvoudige interest. In de oefeningen komen we op deze kwestie terug. Voor uw leerlingen is het vergelijken van het verloop van de grafieken van $f(t)=(1+\frac{i}{100})^t$ en $g(t)=(1+\frac{i}{100}\cdot t)$ met rentepercentage i over de intervallen $0<t<1$ en $t>1$ een zinvolle oefening.

Stevin geeft in de *Tafelen* een groot aantal voorbeelden van enkelvoudige interest in oplopende moeilijkheidsgraad en reikt effectieve rekenregels aan. In het eerste voorbeeld van pagina 20 is de vraag hoeveel schuld iemand nu heeft als hij na één jaar een bedrag van 300 libra terug moet betalen tegen 12 % enkelvoudige rente per jaar. Stevin geeft als antwoord een bedrag van 367 $\frac{6}{7}$ libra. Waar Stevin in proza de regel van drie uitschrijft, kun je voor leerlingen een verhoudingstabel gebruiken om de berekening te duiden:

100 + 12 = 112	300
100	267 $\frac{6}{7}$

In het tweede voorbeeld, onderaan pagina 15, is de vraag hoeveel een bedrag van 320 libra in 5 jaar aan rente geeft als een bedrag van 27 libra in vier jaar een bedrag van 14 libra geeft. Stevin gebruikt hier de volgende regel, die door ons in een verhoudingstabel is geplaatst om lange zinnen te vermijden. Zijn antwoord is 207 $\frac{11}{27}$ libra.

27 · 4 = 108	320 · 5 = 1600
14	207 $\frac{11}{27}$

De effectiviteit van deze regel blijkt bij het zesde voorbeeld op pagina 19. Gevraagd wordt hoeveel jaren een bedrag van 260 libra moet uitstaan tegen 12 % enkelvoudige rente per jaar opdat de som van de rentes een bedrag van 187 libra en vier stuivers is. Het antwoord is 6 jaar.

100	1560 = 260 · 6
12	187,2

In het vierde voorbeeld op pagina 17 wordt gesteld dat iemand in vier jaar tijd een schuld van 224 libra opbouwt, te weten ieder jaar een bedrag van 56 libra, het vierde deel. De vraag is welk bedrag er na vier jaar aan rente betaald moet worden als gerekend wordt met 12 % enkelvoudige interest per jaar. Om dit voorbeeld goed te begrijpen is het noodzakelijk te weten wanneer de schuld wordt opgebouwd. Het is zinvol om met uw leerlingen een tijdlijn te maken en bij te schrijven wat op ieder moment de waarde van de schuld is. Stevin legt uit dat aan het einde van het eerste jaar een bedrag van 56 libra betaald zou moeten worden, maar dat deze betaling drie jaar wordt uitgesteld. Over dit bedrag moet dus drie keer rente betaald worden. Evenzo aan het einde van het tweede jaar wordt de betaling voor twee jaar uitgesteld, aan het einde van het derde jaar wordt de betaling één jaar uitgesteld, maar het vierde en laatste jaar wordt op tijd betaald en is dus geen rente verschuldigd. Uiteindelijk moet betaald worden 3+2+1=6 keer de rente tegen 12 %. Het verschuldigde bedrag aan rente is dus $40\frac{8}{25}$ libra.

100 + 100 + 100 + 100 = 400	36 + 24 + 12 + 0 = 72
56 + 56 + 56 + 56 = 224	$40\frac{8}{25}$

In het tweede voorbeeld op pagina 20 is de vraag hoeveel schuld iemand bij aanvang heeft als hij na drie jaar een bedrag van 32 libra moet betalen tegen jaarlijks de 16de penning enkelvoudige interest. Stevin rekent als volgt. Na één jaar worden 16 penningen er 17, na twee jaar worden het er 18, na drie jaar 19. Dus, tel de drie bij de 16 op, geeft 19, reken uit 19 staat tot 16 als 32 staat tot dat onbekende bedrag. De uitkomst is $26\frac{18}{19}$ libra.

16 + 3 = 19	16
32	$26\frac{18}{19}$

Aansluitend rekent Stevin op pagina 21 uit wat er moet gebeuren bij een termijn van een halfjaar. Vraag is hoeveel schuld iemand bij aanvang heeft als hij na een halfjaar een bedrag van 250 libra moet betalen tegen de 16de penning jaarlijks enkelvoudige interest. Stevin komt uit op $242\frac{14}{33}$ libra schuld.

16 + 0,5 = 16,5	16
250	$242\frac{14}{33}$

5 Interest over een gedeelte van een jaar

Stevin en zijn tijdgenoten hadden meningsverschillen over de manier waarop samengestelde interest berekend moest worden over een gedeelte van een jaar. Interessant is het tweede voorbeeld op pagina 61. Vraag is om uit te rekenen hoeveel een bedrag van 800 libra waard is na 16,5 jaar met jaarlijkse rente op rente tegen de 15de penning. In dit voorbeeld gaat het om het correct verwerken van dat extra half jaar. Wanneer rente op rente uitgekeerd wordt over de hele 16,5 jaar, is het eindkapitaal $800 \cdot (1+\frac{1}{15})^{16,5} \approx$ 2320,41 libra. Echter, Simon Stevin komt uit op 2321,61 libra. Het verschil heeft deels te maken met afrondingsfouten, maar er is meer aan de hand. Wellicht wilt u het eerst zelf onderzoeken. De verklaring staat in de *Tafelen* op pagina 61 en verder.

Stevin volgt de traditionele opvatting van zijn tijd dat bij een periode korter dan een heel jaar altijd gerekend moet worden met enkelvoudige interest. Bij een periode langer dan een jaar vindt Stevin dat over het geheel aantal jaren gerekend mag worden met samengestelde interest, maar dat over het gedeelte van het jaar altijd met enkelvoudige interest gerekend moet worden. Zijn argument is dat *alle ghecomponeerden profijtelijcken interest is voor den crediteur profijtelijcker dan simpelen interest*. Hij vermenigvuldigt $800 \cdot (1+\frac{1}{15})^{16}$ met de factor $\frac{15{,}5}{15}$. Uw leerlingen mogen onderzoeken waarom $(1+\frac{1}{15})^{0{,}5}$ niet gelijk is aan $\frac{15{,}5}{15}$, of in het algemeen, dat $(1+\frac{1}{p})^{t} \neq \frac{p+t}{p}$. Dit brengt ons terug naar de eerdere opmerking over het verloop van de grafieken van lineaire en exponentiële functies. Voor $0<t<1$ is $(1+\frac{i}{100})^{t} < (1+\frac{i}{100} \cdot t)$ of in woorden: in een deel van een jaar is de waarde van de samengestelde interest lager dan die van de enkelvoudige interest.

Opmerkelijk is dat Stevin volledig voorbijgaat aan de opmerkingen van Trenchant, temeer omdat Trenchant het in 1578 volgens moderne opvattingen correct opschrijft. Vanaf pagina 308 bij onderdeel 11 rekent hij met rente op rente tegen de twaalfde penning per jaar. Trenchant legt uit dat je bij samengestelde interest over een halfjaar niet het gemiddelde moet nemen van 100 en $108\frac{1}{3}$, te weten $104\frac{1}{6} \approx 104{,}17$, maar moet nemen wat hij de “middelevenredige” noemt, te weten de wortel van hun product, dus $\sqrt{100 \cdot 108\frac{1}{3}} \approx 104{,}08$. En dat je bij een periode van drie maanden weer de wortel van hun product moet nemen, dus $\sqrt{100 \cdot 104{,}0833} \approx 102{,}02$.

Een paar jaar later liet Stevin zien in *L‘Arithmétique* dat hij uitstekend kon omgaan met machtsvergelijkingen en hogeremachtswortels. In de *Spiegheling der Singconst* verdeelde hij met machtswortels een octaaf in twaalf gelijke delen zodat de verhouding tussen de twaalf opeenvolgende tonen gelijk was aan $\sqrt[12]{2}$. In *The Principal Works* kunt u in het vijfde deel vanaf pagina 413 lezen over zijn bijdrage aan de gelijkzwevende stemming. Belangrijk is ook dat hij propageerde dat hogeremachtwortels getallen waren die net zo gewoon zijn als gehele getallen of breuken.

Hoe zeer het vakgebied in ontwikkeling was, bleek in 1626. Terwijl Albert Girard in 1625 en 1634 nog de oude tekst van Simon Stevin opdiende, schreef Ezechiel De Decker in *Eerste deel van de nievwe telkonst* [Decker, 1626] op een moderne manier over samengestelde interest. Vanaf pagina 285 legde hij uit hoe men behoorde te rekenen aan maandelijkse rente op rente. In zijn inleiding schreef hij dat men bij “*interest op interest berekening het verschuldigde bedrag van minuut tot minuut, van uur tot uur, van dag tot dag en van maand tot maand vindt als een meetkundige rij door gedurig te vermenigvuldigen*”. Hij verwees naar het boek *Waerachtighe maendt ende jaer-tafelen van interest* [Verkammen, 1620] waar de maand-rekening volledig werd verklaard. U kunt uw leerlingen anno 2020 laten weten dat zij zich te voegen hebben naar een theorie die 400 jaar langzaam maar zeker vorm kreeg.

6 Erreur

Tot slot een voorbeeld dat historisch interessant is. Simon Stevin neemt op pagina 23 een opdracht over uit het boek van Jan Trenchant, de man uit Lyon, om te laten zien dat zijn uitwerking beter is dan die van Trenchant. Stevin verwijst expliciet naar opdracht 6 van hoofdstuk 9 uit het derde boek van *L'Arithmétique*. Dat moet de editie van 1578 zijn.

Het gaat erom welke bedragen iemand vier jaar lang achtereenvolgens moet betalen om een schuld af te lossen die op de einddatum 600 libra waard is en dat tegen 12 % enkelvoudige rente per jaar. Daarbij moeten die vier betalingen in principe dezelfde zijn. Straks zult u zien dat de meningen verdeeld zijn over wat daarmee bedoeld wordt. Stevin ziet het zo. Voor hem zijn die eerste drie termijnen een vooruitbetaling. De laatste termijn is dan de laatste betaling. Stevin splitst de lening op in vier delen, ieder met waarde 150 libra op einddatum. Hij rekent voor ieder deel uit welke betaling bij die waarde hoort. Het eerste bedrag wordt drie jaar voor de einddatum betaald. Stevin rekent uit dat een betaling aan het einde van het eerste jaar van $110\frac{5}{17}$ libra aan het einde van die vier jaar, dat wil zeggen na drie jaar, dat gewenste bedrag van 150 libra waard is. Evenzo rekent hij de andere betalingen uit: $120\frac{30}{31}$ libra, $133\frac{13}{14}$ libra en 150 libra.

136	150	124	150	112	150	100	150
100	$110\frac{5}{17}$	100	$120\frac{30}{31}$	100	$133\frac{13}{14}$	100	150

Trenchant maakt een andere berekening. Hij stelt voor om vier keer een bedrag van $127\frac{7}{59}$ libra te betalen.

112 + 124 + 136 + 100 = 472	150	600
100 + 100 + 100 + 100 = 400	$127\frac{7}{59}$	$508\frac{28}{59}$

Hoewel in de berekening van Trenchant alle getallen terugkomen die Stevin ook gebruikt, komt er toch een ander bedrag voor de betalingen uit. Uw leerlingen kunt u vragen om na te denken over hoe dit mogelijk is. Een eerste reactie kan zijn dat een van de twee juist is en dat de andere fout is. Het zal ze verbazen dat beide goed zijn, mits men ze voorziet van de juiste argumentatie, zoals aangetoond door Waller Zeper, die in 1937 promoveerde op het proefschrift *De Oudste Interesttafels in Italië, Frankrijk en Nederland* [Waller Zeper, 1937]. Ook Struik, wiskundige en wetenschapshistoricus, geeft in *The Principal Works* [Struik, 1958] beiden gelijk. De vraag is namelijk niet wat goed is en wat fout, maar wat het verschil in redenering is. Dat kan een aardige discussie met uw leerlingen opleveren. Wellicht merkt iemand op dat de formulering van “*de betaling een vierde deel moet zijn*” te vaag is. Overeenkomst is dat Stevin en Trechant beiden een aantal betalingen doen waarvan de som op einddatum een even groot bedrag waard is. Verschil is dat Stevin voorstelt om vier verschillende betalingen te doen met dezelfde eindwaarde, terwijl Trenchant voorstelt om vier keer hetzelfde bedrag te betalen.

Schematisch ontstaat bij Stevin het volgende beeld van betalingen, uitgezet in de tijd, en waarde aan het einde van het vierde jaar. Merk op dat er niets gezegd wordt over de beginwaarde van de schuld. Die berekening komt in een ander voorbeeld aan bod.

betaling 1	betaling 2	betaling 3	betaling 4	waarde
$110\frac{5}{17}$				150
	$120\frac{30}{31}$			150
		$133\frac{13}{14}$		150
			150	150
				600

Voor Trenchant ziet het schema er iets anders uit, maar ook bij hem is de eindwaarde van de schuld 600 libra.

betaling 1	betaling 2	betaling 3	betaling 4	waarde
$127\frac{7}{59}$				$172\frac{52}{59}$
	$127\frac{7}{59}$			$157\frac{37}{59}$
		$127\frac{7}{59}$		$142\frac{22}{59}$
			$127\frac{7}{59}$	$127\frac{7}{59}$
				600

Interessant is hoe Stevin met zijn nieuwe inzicht omgaat. Daartoe moeten we onderzoeken wat hij doet bij de volgende voorbeelden. Ook onderzoeken we wat hij in latere edities van de *Tafelen* schrijft.

In de Franstalige editie *L'Arithmetique* [Stevin, 1585] is de toon veel rustiger en de verwijzing naar Trenchant ontbreekt. Ook in de Franstalige edities die na Stevins dood zijn verzorgd door Albert Girard [Girard, 1625, 1634] ontbreken de passages over Trenchant ([4]).

Aansluitend presenteert Stevin op pagina 25 een zevende voorbeeld. Het gaat om de huidige waarde van een schuld waarop terugbetaald wordt in zes jaarlijkse termijnen van 54 libra tegen 12 % enkelvoudige rente per jaar, de eerste termijn aan het einde van het eerste jaar. Deze opdracht lijkt met zijn termijnen op de vorige opdracht. Je zou verwachten dat Stevin zijn aanpak zou herhalen, maar hij volgt de aanpak van Trenchant die hij in het vorige voorbeeld nadrukkelijk weerlegde. Stevin berekent op deze manier dat de waarde van de lening aan het begin $228\frac{12}{71}$ is.

112 + 124 + 136 + 148 + 160 + 172 = 852	6 ∗ 54 = 324
100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 600	$228\frac{12}{71}$

Jammer genoeg gaat in deze berekening iets niet goed, want de getallen hebben betrekking op verschillende grootheden. Linksboven staat de waarde van de zes betalingen op einddatum terwijl linksonder en rechtsboven de som van zes betalingen in de tijd staan. Kortom, deze getallen zijn noch in de rijen noch in kolommen met elkaar te vergelijken en dus vergelijk je appels met peren. In onderstaande tabel staat een aangepaste berekening. Wanneer zes betalingen van 100 na zes jaar 852 libra waard zijn, dan zijn zes betalingen van 54 libra na zes jaar 460,08 libra waard.

112 + 124 + 136 + 148 + 160 + 172 = 852	460,08
100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 600	6 ∗ 54 = 324

Echter, dit is de eindwaarde na zes jaar en niet de gevraagde beginwaarde. In de Franse vertaling van 1585 staat de juiste berekening. Stevin herhaalt zijn aanpak van het vorige voorbeeld. In de eerste rij moet een bedrag van 54 libra verdisconteerd worden over één jaar. Dat levert de waarde van $54 \cdot \frac{100}{112} = 48\frac{3}{14}$ op. Bij de tweede betaling van 54 libra hoort een schuld van $54 \cdot \frac{100}{124} = 43\frac{17}{31}$ enzovoort. De totale schuld aan het begin van de zes jaar is de som van deze zes bedragen, dat is een bedrag van 233,10 libra. Hieronder staat het betalingsschema in tabelvorm.

waarde	betaling 1	betaling 2	betaling 3	betaling 4	betaling 5	betaling 6
$48\frac{3}{14}$	54					
$43\frac{17}{31}$		54				
$39\frac{12}{17}$			54			
$36\frac{18}{37}$				54		
$33\frac{3}{4}$					54	
$31\frac{17}{43}$						54
233,10						

Albert Girard kiest in de editie van 1625 (pagina 752) en 1634 (pagina 189) ook voor de tweede benadering en heeft er niets aan toe te voegen.

Tot slot een opmerking waarom dit soort berekeningen conceptueel zo lastig is. Verwarrend is het noemen van dat bedrag van 324 libra, want dat bedrag is de som van betalingen in zes verschillende jaren. Iedere betaling heeft een andere waarde. Zodoende worden onvergelijkbare grootheden bij elkaar opgeteld en dus loopt iedere berekening met die 324 spaak.

7 Oefeningen

Zoals een ‘meester didacticus’ betaamt, geeft Simon Stevin tal van voorbeelden om het gebruik van zijn tabellen te illustreren. De oefeningen over enkelvoudige interest kunnen al door leerlingen van het derde jaar opgelost worden. Leerlingen moeten echter wel al exponentiële functies kennen om de oefeningen over samengestelde interest aan te kunnen. Hieronder staat een kleine selectie van interessante oefeningen. Al deze oefeningen zijn samen met de tafelen te vinden op het internet ([5]). Voor de eenvoud gebruiken we in de opgaven meestal de moderne benamingen en notatie. Het zou zeker een mooi eerbetoon zijn om de voorgestelde oefeningen op te lossen met behulp van Stevins tafelen, maar het is aangewezen ze ook algebraïsch exact op te lossen. Dergelijke aanpak zal de leerlingen laten aanvoelen dat de wiskunde in de loop der jaren sterk geëvolueerd is en dat verscheidene vraagstukken met een totaal andere oplossingsmethode kunnen worden benaderd. Uiteraard is het zinvol om berekeningen met een grafische rekenmachine te controleren want een foutje is zo gemaakt.

1. Als p de waarde is van de penning, leidt dan met algebra uit de formules (1), (2) en (3) een uitdrukking af voor de procentuele interestvoet i.
   Bereken vervolgens voor $p = 19$ de interestvoet.

2. Bereken op de manier van Stevin de eerste twintig regels van de tabel van de negentiende penning. Vergelijk je antwoord met de tabel op pagina 55.

3. *Het zijn 320 libra te betaelen binnen 3 jaar en 3 maanden. De vraeghe is wat die weerdich zijn ghereedt ghelt aftreckende teghen de penninck 16, t’ siaers simpelen interest*. (Exempel 4 van pagina 22)

4. Bereken de enkelvoudige rentevoet i wanneer een beginkapitaal van $333\frac{1}{3}$ libra na 5 jaar 500 libra waard is. (Exempel 11 van pagina 28)
5. Na 7 jaar moet een schuld van 1200 libra worden betaald. Bereken met behulp van de tabellen hoeveel deze schuld bedraagt na 23 jaar aan een samengestelde interestvoet van 8%? (Exempel 3 van pagina 64)

Stevin geeft eerlijk toe dat een perfecte oplossing niet altijd voorhanden is. Zoals hij zelf schrijft: *zoo en kanmen de solutie maar bycans zeggen / t'welck in de practijcke oock dickmael ghenoech is*.

6. Een schuld van 400 libra groeit na 10 jaar aan tot 1037 libra. Zoek met behulp van de tabellen de samengestelde interestvoet. (Exempel 7 van pagina 72)
7. Bereken op de manier van Stevin hoeveel jaren en hoeveel dagen een beginkapitaal van 800 libra tegen de 17de penning met samengestelde interest moet uitstaan om een eindkapitaal te geven van 2500 libra? (Exempel 8 van pagina 73)
8. Gegeven is een bedrag dat binnen zes jaar moet worden terugbetaald met een jaarlijkse betaling van 54 libra. Bereken met behulp van de tabellen de aanvangswaarde rekening houdend met samengestelde interest met penning 16. (Exempel 6 van pagina 79)
   Maak ook met algebra een formule voor de derde kolom met de cumulatieven, waarbij n het aantal periodes is en p de penning en i de interestvoet.

Uiteraard heeft Simon Stevin nog tal van voorbeelden, oefeningen en variaties op dergelijke opgaven uitgewerkt die door leerlingen kunnen worden opgelost in het kader van een onderzoeksopdracht of seminarie. Het zal leiden tot de eerste stappen in de financiële rekenkunde. Stevin parafraserend, zouden we zeggen, niet voor de liefde tot eigen profijt, maar voor de glorie van de conste.

8 Extra

De volgende drie extra oefeningen zijn een uitbreiding van de laatste oefening hierboven waarin sprake is van een constante betaling van jaarlijks 54 libra. Stellen we deze vaste betaling gelijk aan a, het aantal betalingen gelijk aan n en hanteren we interestvoet i%, dan kunnen we drie extra vragen stellen.

1. Stel een algemene formule in functie van a, i en n op om de aanvangswaarde te berekenen, dat wil zeggen het beginkapitaal dat nodig is om die n afbetalingen te kunnen betalen.
2. Stel een algemene formule op voor de aanvangswaarde van een periodieke betaling over n gelijke periodes als de annuïteiten een rekenkundige rij vormen, dat wil zeggen dat elke betaling met een vast bedrag p verschilt van de vorige betaling.
3. Stel een algemene formule voor de aanvangswaarde van een periodieke betaling over n gelijke periodes als de annuïteiten een meetkundige rij vormen, dat wil zeggen dat elke betaling gelijk is aan de onmiddellijk voorafgaande betaling vermenigvuldigd met een constant getal q.

Deze extra oefeningen onderstrepen het verschil tussen de moderne algebraïsche aanpak en de aanpak van Simon Stevin met zijn tafelen en rekenschema´s. De algebra mag dan niet zo eenvoudig zijn, het handmatig uitrekenen van een verzameling tabellen voor veel verschillende a, n, i, p en q is nog veel meer werk.

9 Oplossingen

Hieronder staan de oplossingen van de acht oefeningen.

1. Het verband tussen beginwaarde k en eindkapitaal K voor t jaren luidt

   $$\frac{K}{k}=\frac{p+t}{p}. \tag{4}$$

   Invullen van t = 1 in $K=k(1+i\,t)$ geeft $\frac{K}{k}=\frac{p+1}{p}=1+i$ en dus dat $i=\frac{1}{p}$. (5)

   Invullen van p = 19 geeft dan dat $i=\frac{1}{19}\cdot 100$ % ≈ 5,26 %.

2. Hoewel voor p = 19 de interestvoet i een breuk met oneindig veel decimalen is, zijn de uitkomsten van de berekeningen voor afronding allemaal getallen met slechts één of twee decimalen. Dat komt omdat de factor waarmee vermenigvuldigd wordt de breuk 19/20 is. In de vierde en de vijftiende regel is de uitkomst voor afronding een getal dat eindigt op exact een half. Deze uitkomsten rondt Stevin af naar beneden. In de vierde regel moet daarom het getal 8 145 062 staan en in de vijftiende regel het getal 4 632 912.

3. Deze oefening is een vervolg op het eerder besproken tweede voorbeeld op pagina 20. Na één jaar worden 16 penningen er 17, na twee jaar worden het er 18, na drie jaar 19 en na drie jaar en drie maanden worden het er 19,25. Dus 19,25 staat tot 16 als 320 staat tot $265\,\frac{75}{77}$.

   Met algebra is aan te tonen dat uit $A=\frac{S}{1+i\,t}$ en $i=\frac{1}{p}$ volgt dat $A=S\,\frac{p}{p+t}$. (6)

   Gegeven is S = 320, p = 16 en t = 3,25, waaruit volgt A = $265\,\frac{75}{77}$.

4. Uit formule (2) volgt dat $\frac{K}{k}=\frac{500}{333\frac{1}{3}}$ = 1+5 i en dus i = 0,1 dus i = 10 %.

   Omdat het om enkelvoudige interest gaat, kunnen de tabellen niet gebruikt worden. Wel kan gewerkt worden met een verhoudingstabel. Op deze manier vindt Stevin dat p = 10 en uit (4) volgt dat i = 10 %.

500	150	15	$p+t$	$p+5$	10 + 5
$333\frac{1}{3}$	100	10	p	p	10

5. Op pagina 42 staat de tabel van 8 ten 100. Met de getallen bij regel 7 en regel 23 laat het antwoord zich berekenen met de regel van drie of een verhoudingstabel. Interessant is dat Stevin op pagina 64 ook de mogelijkheid noemt om te rekenen met het getal dat staat bij regel 23 – 7 = 16. Uitkomst is 4111 en een beetje. U kunt uw leerlingen vragen hoeveel beide uitkomsten van elkaar verschillen.

6. De oplossing van de vergelijking $400\cdot(1+i)^{10}=1037$ is een tiendemachtswortel. Volgens een rekenmachine is het antwoord ongeveer 9,99 %.
   Zonder rekenmachine is het met de tabellen niet veel meer werk. De getallen 1037 en 400 verhouden zich als 10 000 000 staat tot 3 857 281. Bladeren door de tabellen leert dat de tiende regel van 10 ten 100 er het meest dichtbij zit.

7. De vergelijking $800 \cdot \left(1+\frac{1}{17}\right)^t = 2500$ heeft als oplossing $t = \dfrac{\log(2500)-\log(800)}{\log(18)-\log(17)}$, oftewel $t \approx 19{,}9347$. Het concept van logaritmen is echter pas na 1600 geïntroduceerd door John Neper en Henry Briggs. Hiervoor is beschreven waarom Stevin deze berekening zou verwerpen. Hij was van mening dat het aantal gehele jaren berekend moeten worden op basis van samengestelde interest, maar het resterende gedeelte van het jaar op basis van enkelvoudige interest. Die 2 500 verhoudt zich tot 10 000 000 als 800 tot 3 200 000. Bij 19 jaar hoort volgens de tabel 3 375 606 en bij 20 jaar 3 188 072. Zo komt Stevin op minstens 19 jaar. Hij rekent ook aan het resterende gedeelte van dat jaar. Hiervoor is beschreven hoe hij een berekening doet voor drie jaar en drie maanden. Die 3 200 000 verhoudt zich tot die 3 375 606 als 17 tot 17,9329. Tot slot nog even omrekenen van 0,9329 jaar naar 341 dagen. U kunt uw leerlingen vragen om het verschil in aantal dagen tussen beide methoden uit te rekenen. Ook kunt u teruggrijpen op de formules bij (4).
   Uit $\dfrac{K}{k} = \dfrac{p+t}{p}$ volgt dat $p\dfrac{K}{k} = p+t$

8. Op pagina 52 staan in de derde kolom de cumulatieven van de 16de penning. In de zesde regel staat het getal 48 789 356. Dat getal staat tot 6 keer 10 000 000 als de aanvangswaarde tot 6 keer 54 libra. De aanvangswaarde is dan 263,46 libra.
   Met de huidige notatie en algebraïsche methode is de aanvangswaarde te berekenen met de formule $A = 54\dfrac{1-\left(\frac{1}{1{,}0625}\right)^6}{0{,}0625} \approx 263{,}46$, uiteraard met hetzelfde antwoord.
   Het afleiden van deze formule vraagt om de algebraïsche vaardigheid om de uitdrukking: $\sum_{t=1}^{n} \dfrac{10\,000\,000}{\left(1+\frac{1}{p}\right)^t}$ te herleiden tot bijvoorbeeld $p - \dfrac{p^{n+1}}{(1+p)^n}$ en tot $\dfrac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{i}$.

10 Besluit

Simon Stevin is een boeiende persoonlijkheid die leefde in spannende tijden. Hij werkte voor de bestuurlijke elite van zijn tijd. Om tot de denkwereld van Stevin door te dringen is het belangrijk om te begrijpen in wat voor tijd hij leefde. Het was een tijd van ondernemers, niet enkel in de handel, maar ook in de oorlogsvoering. Het was een wereld die gebaseerd was op krediet en op schuld.

Simon Stevin heeft historisch gezien belangrijke werken geschreven. Het onderwerp van *De tafelen van Interest* was in die tijd beslist niet triviaal. De meeste voorbeelden spreken voor zich, maar er zijn ook pittige voorbeelden waar de context minder vanzelfsprekend is. Leerlingen vinden de materie vaak lastiger dan de wiskunde. In Stevins tijd stond het vakgebied nog in de kinderschoenen. Stevin is een van de pioniers en schuwde de discussie niet. Hij mag beschouwd worden als de man die met zijn rentetabellen de geheimen van de renteberekening onthulde voor een groot publiek in de Lage Landen.

Voor uw leerlingen kunnen de *exempelen* een eyeopener zijn. Hopelijk ontdekken ze dat in de toegepaste wiskunde getallen betekenis hebben, dat schuld nu en schuld straks niet zo maar bij elkaar opgeteld mogen worden, maar eerst verdisconteerd moet worden en dat er heel wat discussie is geweest over hoe je dat op een correcte manier moet doen. Ze ontdekken dat er in die tijd gerekend werd met rekenschema’s en tabellen en dat die met algebra omgezet kunnen worden in compacte en efficiënte formules.

Noten

[1] In het dagelijks taalgebruik zijn zowel de spelling `intrest` als `interest` toegestaan. Wij houden het hier op de spelling van Stevin.

[2] Verwijzingen naar deze edities staan op http://www.fransvanschooten.nl/TafelenVanInterest.htm.

[3] Op de website http://www.fransvanschooten.nl/TafelenVanInterest.htm staan verwijzingen naar de originele teksten uit de *Tafelen*.

[4] Ludolf van Ceulen behandelt deze opdracht en aanpak van Stevin op folio 88 in Van Den Circkel [Ceulen, 1596].

[5] Op de website http://www.fransvanschooten.nl/TafelenVanInterest.htm staan verwijzingen naar de originele teksten uit de *Tafelen*.

Literatuur

Op de website http://www.fransvanschooten.nl/TafelenVanInterest.htm staat een meer uitgebreide literatuurlijst met verwijzingen naar de bronnen. Verder verwijzen we naar de website van Ad Davidse: http://adcs.home.xs4all.nl/stevin/ .

Ceulen, L., *Van den Circkel: daer in gheleert werdt te vinden de naeste Proportie des Circkels-Diameter teghen synen omloop, daer door alle Circkels ... Ten laatsten, van Interest, met allerhande Tafelen*, Delft, Jan Andriesz, 1596

Decker, E. de, *Eerste deel vande nievwe telkonst …*, Gouda, Pieter Rammaseyn,

Stevin, S., *Tafelen van interest, midtgaders de constructie der selver ...* , Antwerpen, Christoffel Plantijn, 1582

Stevin, S., *De Thiende: Leerende door onghehoorde lichticheyt allen rekeningen onder den menschen noodig vallende, afveerdighen door heele ghetalen sonder ghebrokenen*, Leiden, Christoffel Plantijn, 1585

Stevin, S., *L'Arithmetique ...* , Antwerpen, Christophle Plantin, 1585

Struik, D., *The Principal Works of Simon Stevin Volume II A, Mathematics*, Amsterdam, Swets & Zeitlinger, 1958

Trenchant, J., *L' Arithmétique*, Lyon, Michel Iove et Jean Pillehotte, 1578

Verkammen, A., *Waerachtighe Maendt- ende Jaer-Tafelen van Interest ...*, Rotterdam, Jan van Waesberghe, 1620

Waller Zeper, C.M., *De oudste interesttafels in Italië, Frankrijk en Nederland met een herdruk van Stevins "Tafelen van Interest"* , Amsterdam, Noord-Hollandsche Uitgeversmaatschappij, 1937

Over de auteurs

Henk Hietbrink is docent wiskunde op het Hermann Wesselink College te Amstelveen en beheerder van de websites www.fransvanschooten.nl en www.henkhietbrink.nl.
E-mail: hietbrink.h@planet.nl

Jean-Marie Dendoncker is administratief en technisch personeelslid aan de UGent.
E-mail: j_dendoncker@hotmail.com