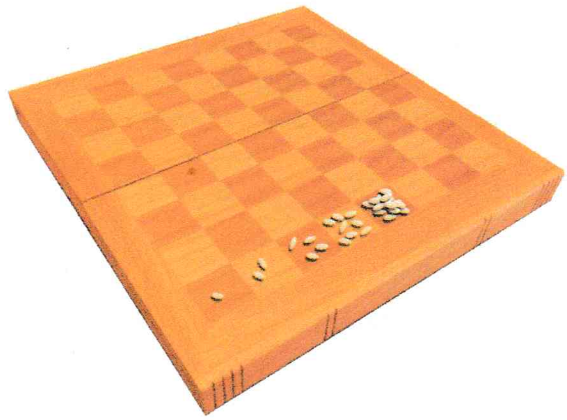
Exponentiële functies en het COVID-19 virus

Inleiding: voorbeeld schaakbord



Volgens de legende werd het schaakspel meer dan 1500 jaar geleden uitgevonden in India. Een lokale koning was zo vol van het nieuwe spel, dat hij de uitvinder vroeg wat hij als beloning zou willen hebben.

De uitvinder vroeg om één graankorrel op het eerste veld van het schaakbord, twee graankorrels op het tweede veld, vier op het derde veld, acht op het vierde veld, enz. Op elk veld vroeg hij dus het dubbele aantal graankorrels van het aantal op het vorige veld.

De koning was in eerste instantie beledigd dat de uitvinder zo'n bescheiden vergoeding vroeg, tot de rekenmeesters van het hof hadden uitgerekend om hoeveel graankorrels het nu eigenlijk ging.

Opdracht 1: Reken uit hoeveel graankorrels er op de verschillende velden van het schaakbord zouden moeten liggen. Hoeveel graankorrels liggen er op het laatste veld?

Nr. veld	1	2	3	4	5	6		10		64
# graankorrels	1	2	4	8	16	32	…	512	…	$9,223 \cdot 10^{18}$ *
Exponentiële notatie	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5		2^9		2^{63}

* 9223 372 036 854 775 808 → 9 triljoen

Als we al deze graankorrels zouden optellen, zouden we uitkomen op maar liefst 18 446 744 073 709 551 615 graankorrels, wat meer is dan de totale wereldproductie aan graan!

→ 18 triljoen

Dit voorbeeld is een zeer goede illustratie van de snelheid van exponentiële groeiprocessen. Het aantal graankorrels per veld kan je beschrijven aan de hand van volgend functievoorschrift als functie van het veldnummer x:

$f(x) = 2^{x-1}$

Veralgemening:

Exponentiële functies zijn functies van de vorm $f(x) = N_0 a^x$, met $N_0, a \in \mathbb{R}_0$.

Uitbreiding naar de verspreiding van een virus

De verspreiding van een nieuw virus is erg analoog aan de evolutie van het aantal graankorrels op een schaakbord. Neem nu bv. de gewone seizoensgriep. Bij een nieuwe versie van het griepvirus (bv. de Mexicaanse griep uit 2009) infecteert een besmette persoon typisch twee personen.

Als we voor de eenvoud aannemen dat die nieuwe gevallen telkens de daarop volgende dag opduiken (wat niet helemaal klopt door de lengte van de incubatieperiode), vinden we het volgende verloop:

Dag	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
# nieuwe gevallen	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
Exponentiële notatie	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9

Opdracht 2: Op welke dag zullen er voor het eerst meer dan 10 000 nieuwe ziektegevallen zijn? Op dag 14.

$2^{13} = 8192$ $2^{14} = 16\,384$

Opdracht 3: Op welke dag zou het aantal nieuwe gevallen volgens dit model groter zijn dan de totale wereldbevolking van 7,7 miljard mensen?

Op dag 33.

Opdracht 4: Uiteraard kunnen er niet meer zieken zijn dan de totale wereldbevolking. Wat zou ervoor zorgen dat het aantal nieuwe zieken per dag uiteindelijk afneemt?

Als iemand de ziekte heeft gehad wordt hij of zij immuun. Uiteindelijk zullen er niet genoeg mensen meer overblijven die de ziekte nog niet hebben gehad in de buurt van de zieke. Zodra dat gebeurt neemt de verspreiding af.

Opdracht 5: Hoe zou het aantal nieuwe besmettingen per dag evolueren als één zieke persoon telkens 3 nieuwe mensen infecteert?

Dag	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
# nieuwe gevallen	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
Exponentiële notatie	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9

Reproductiegetal van een virus

Bij de start van een epidemie komt een zieke persoon enkel in contact met mensen die nog niet ziek zijn. Het gemiddeld aantal mensen dat één zieke persoon infecteert in deze startfase noemen we het **basaal reproductiegetal** R_0 van deze ziekte. Voor de griep is dit basis reproductiegetal typisch ongeveer twee: één zieke persoon infecteert gemiddeld ongeveer 2 nieuwe personen.

Elke ziekte heeft zijn eigen reproductiegetal. Hoe groter dit getal, hoe besmettelijker de ziekte. Een van de meest besmettelijke ziekten die we kennen is de mazelen. Door de hoge vaccinatiegraad is het reproductiegetal van de mazelen moeilijk te meten, maar men schat dat dit tussen de 16 en de 18 ligt. Schattingen voor het basis reproductiegetal van het nieuwe Coronavirus COVID-19 variëren tussen 1,4 en 3,8. Het is een redelijk besmettelijk virus, maar niet extreem besmettelijk zoals bv. de mazelen.

Het **effectieve reproductiegetal** R_{eff} van een virus is in de praktijk kleiner, om volgende redenen:

- Na verloop van tijd zullen er steeds meer mensen in de omgeving van de zieke zijn die de ziekte al gehad hebben en dus immuun zijn geworden.
- Maatregelen om een epidemie in te dijken (handen wassen, zieke mensen die thuis blijven, quarantaines, ...) beperken de verspreiding van het virus.

Vereenvoudigd model

In ons vereenvoudigd model, waarbij we aannemen dat nieuwe gevallen telkens de daarop volgende dag opduiken, vinden we volgende formule voor het aantal nieuwe zieken per dag:

$$\mathrm{N(t)} = \mathrm{N_0 R_{eff}^t}$$

Hierbij is $\mathrm{N_0}$ het aantal nieuwe gevallen op dag nul en t het aantal dagen sinds dag nul.

Situatie: Stel dat er een nieuw virus is met $R_0 = 3$. Op de dag dat dit virus gerapporteerd wordt aan de overheid zijn er 100 nieuwe zieken ($\mathrm{N_0} = 100$). Bereken het effect van verschillende mogelijke acties door de overheid in volgende scenario's.

Scenario 1: De overheid vindt dat 100 nieuwe gevallen nog niet zo veel is en neemt daarom nog geen maatregelen. Het reproductiegetal van het nieuwe virus blijft hetzelfde: $R_{\text{eff}} = 3$.

Dag t	0	1	2	3	4	5	...	10
# nieuwe gevallen $\mathrm{N(t)}$	100	300	900	2700	8100	24300		5 904 900

$N(t) = 100 \cdot 3^t$

Scenario 2: De overheid voert quarantaines in: mensen die het nieuwe virus mogelijk hebben worden zo snel mogelijk afgezonderd tot ze niet meer besmettelijk zijn. Daardoor daalt het effectieve reproductiegetal tot $R_{\text{eff}} = 2$.

Dag t	0	1	2	3	4	5	...	10
# nieuwe gevallen N(t)	100	200	400	800	1600	3200		102400

$N(t) = 100 \cdot 2^t$

Scenario 3: Naast de quarantaines uit scenario 2, geeft de overheid ook het advies aan de bevolking om afstand van elkaar te houden (en zeker van mensen met ziektesymptomen) en om hun handen goed te wassen. Daardoor daalt het effectieve reproductiegetal tot $R_{\text{eff}} = 1{,}5$.

Dag t	0	1	2	3	4	5	...	10
# nieuwe gevallen N(t)	100	150	225	338	506	759		5767

$N(t) = 100 \cdot 1{,}5^t$

Scenario 4: Omdat het virus zo besmettelijk is neemt de overheid onmiddellijk drastische maatregelen: de scholen worden gesloten, grote evenementen worden afgelast en mensen worden aangeraden om zo veel mogelijk thuis te blijven (naast de maatregelen uit scenario 2 en 3). Het effectieve reproductiegetal daalt tot $R_{\text{eff}} = 0{,}5$.

Dag t	0	1	2	3	4	5	...	10
# nieuwe gevallen N(t)	100	50	25	13	6	3		~~0~~ 0

$N(t) = 100 \cdot 0{,}5^t$ 12,5 6,25 ~~0,0~~ 0,1

Opdracht 6: Welk scenario is voldoende om de epidemie in te dijken?

~~Geen~~ Enkel scenario 4.