11th Benelux Mathematical Olympiad

Valkenswaard, 26–28 April 2019

De opgaven staan niet op volgorde van ingeschatte moeilijkheidsgraad.

Opgave 1.

a) Laat a, b, c, d reëele getallen zijn met $0 \leqslant a, b, c, d \leqslant 1$. Bewijs dat

$$ab(a-b)+bc(b-c)+cd(c-d)+da(d-a) \leqslant \frac{8}{27}.$$

b) Vind alle viertallen (a, b, c, d) van reëele getallen met $0 \leqslant a, b, c, d \leqslant 1$ waarvoor gelijkheid geldt in bovenstaande ongelijkheid.

Opgave 2. Op een 2019×2019-schaakbord worden pionnen en torens gezet, met maximaal één stuk op elk van de 2019^2 velden. Een toren staat *in het zicht* van een andere toren als ze in dezelfde rij of kolom staan en alle velden tussen hen leeg zijn. Wat is het grootste getal p waarvoor p pionnen en $p + 2019$ torens op het schaakbord gezet kunnen worden zo dat geen twee torens in elkaars zicht staan?

Opgave 3. Twee cirkels Γ_1 en Γ_2 snijden in punten A en Z (met $A \neq Z$). Zij B het middelpunt van Γ_1 en zij C het middelpunt van Γ_2. De buitenbissectrice van $\angle BAC$ snijdt Γ_1 nogmaals in X en Γ_2 nogmaals in Y. Bewijs dat de binnenbissectrice van $\angle BZC$ door het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle XYZ$ gaat.

Voor punten P, Q, R op een lijn (rechte) ℓ in die volgorde en een punt S niet op ℓ is de binnenbissectrice *van $\angle PQS$ de lijn (rechte) die de hoek $\angle PQS$ in twee gelijke hoeken verdeelt, terwijl de* buitenbissectrice *van $\angle PQS$ de lijn (rechte) is die de hoek $\angle RQS$ in twee gelijke delen verdeelt.*

Opgave 4. Een geheel getal $m > 1$ heet *rijk* als er voor elk geheel getal $n > 0$ gehele getallen $x, y, z > 0$ bestaan zodat $n = mx^2 - y^2 - z^2$. Een geheel getal $m > 1$ is *arm* als hij niet rijk is.

a) Vind een arm getal.

b) Vind een rijk getal.

Language: Dutch

Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten.
Elke opgave is 7 punten waard.