Museum voor de Geschiedenis van de Wetenschappen
Universiteit Gent

Facetten van de Geschiedenis van de Wiskunde

sinds 1870

© André Piens

Version 1.0 – feb. 2018

andre.piens@skynet.be

‘Kennis van de geschiedenis van de wiskunde zal van iemand geen betere, maar wel een menselijkere wiskundige maken.’

George Sarton (Gent, 1884 – Cambridge, Ma, 1956)

Methodiek bij een overzicht van de Facetten van de Geschiedenis van de Wiskunde 1870- 2000

- **een overzicht van de geschiedenis van de wiskunde voor deze periode vereist zeker**

  - ✓ **een oordeelkundige keuze van de belangrijke accenten van de wiskunde**
  - ✓ **een strenge selectie van de belangrijkste wiskundigen**

- **moeilijkheden**

  - ✓ de abstracte verwezenlijkingen voorstellen in klassieke concepten en concrete problemen
  - ✓ de immense explosie van de wiskundige productie
  - ✓ de hyperspecialisatie van de wiskunde in ontelbare gebieden en deelgebieden
  - ✓ het verdwijnen van de universele wiskundigen

- **criteria**

  - ✓ het historisch belang van het probleem
  - ✓ de originaliteit van de gebruikte technieken
  - ✓ het praktisch nut van de wiskundige ontdekking

- **objectiviteit**

  - ✓ de lijst van 23 open problemen van David Hilbert op het 2^{e} Internationaal Wiskundecongres (Parijs, 1900)
  - ✓ de laureaten van de Fields medaille : 2 tot 4 wiskundigen, jonger dan 40 (in 1936, en daarna 4-jaarlijks sinds 1950)
  - ✓ de winnaars van de Wolfprijs : jaarlijks (sinds 1978)
  - ✓ de milleniumprijsproblemen van het Clay Mathematics Institute 2000

De evolutie van de wiskunde in de 19e en 20e eeuw

- tot het begin van de 19e eeuw handelde de wiskunde grotendeels over ***getal en ruimte***
- in de 19e eeuw kende de wiskunde een aanzienlijke ***uitbreiding van het aantal deelgebieden***
- vanaf de tweede helft van de 19e eeuw werd de nadruk vooral gelegd op de
  - ✓ ***studie van de wiskundige structuren***
  - ✓ ***sterkere veralgemening en abstractie***
  - ✓ ***consistentie en volledigheid van de axiomastelsels***
- tijdens de 20^{e} eeuw kenden de unversiteiten een ***toenemend aantal studenten wiskunde***
- de introductie van ***de computer*** werd een belangrijk hulpmiddel
- tijdens de tweede helft van de 20^{e} eeuw volgde een poging tot radicale ***hervorming van het wiskundeonderwijs***

Wiskundige Structuren en Nadruk op Strengheid

Tijdens de 19e eeuw evolueert de wiskunde :

wetenschap van **getal en ruimte** → wetenschap van **wiskundige structuren**

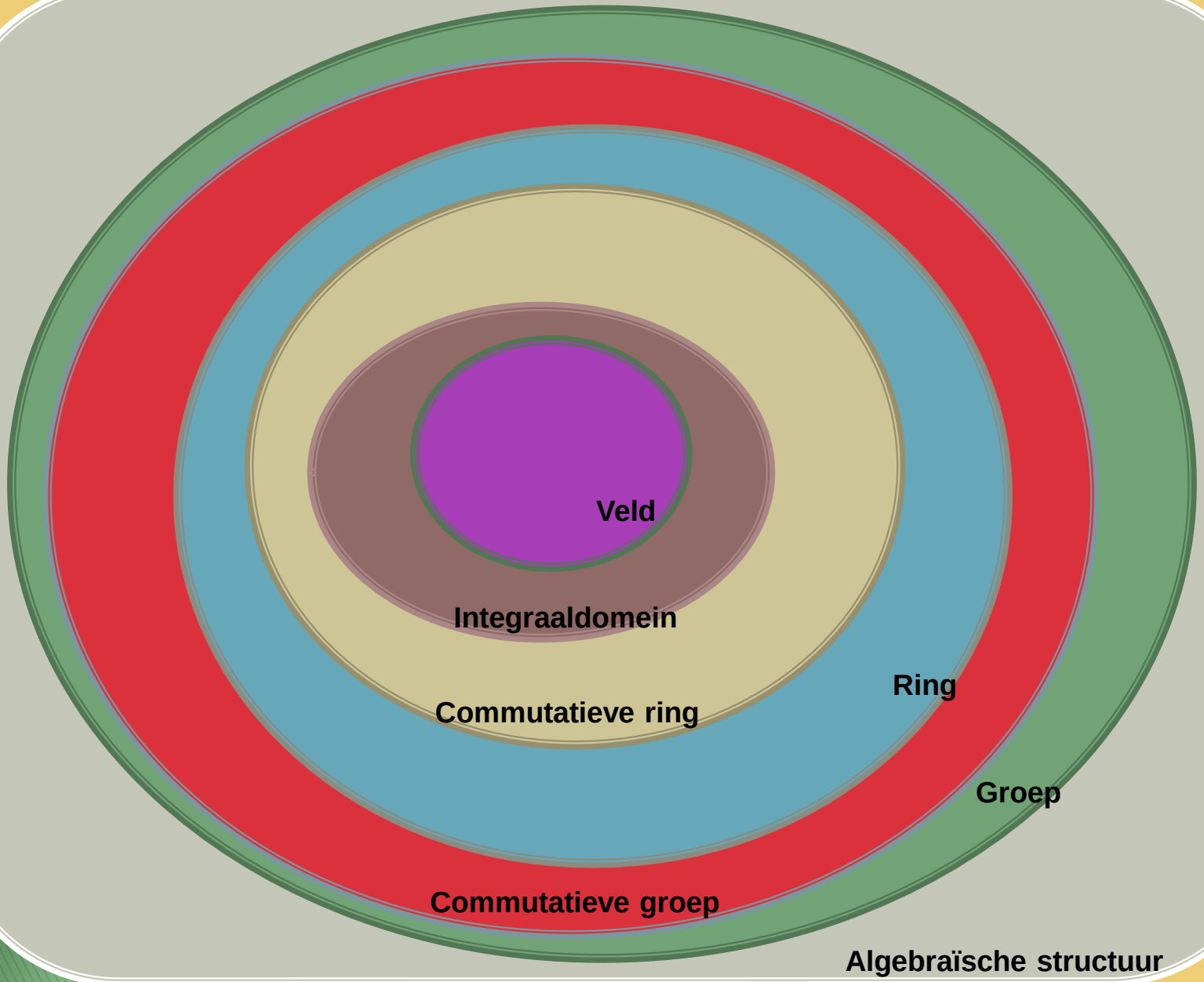
De verzamelingsleer van Cantor en het logicisme in de wiskunde van Frege leidden tot

de **axioma's van de verzamelingsleer** van Zermelo

en

de theorieën over de **grondslagen van de wiskunde**

Algebraïsche structuren



Vernieuwing van de Logica

- Leibniz, maar slechts gepubliceerd in de 19e eeuw, trachtte symbolische logica, wiskunde en filosofie te combineren

- moderne wiskundige logica begon in 1847 onder impuls van
  - ✓ Boole : *The Mathematical Analysis of Logic* en *An Investigation of the Laws of Thought*
  - ✓ De Morgan : *Formal Logic*

- daaruit ontwikkelde zich de Boole-algebra :
  - ✓ relaties tussen de variabelen worden uitgedrukt door vaste tekens (operatoren)
  - ✓ oordeelkundige keuze van de eigenschappen van deze operatoren leiden tot logische deducties

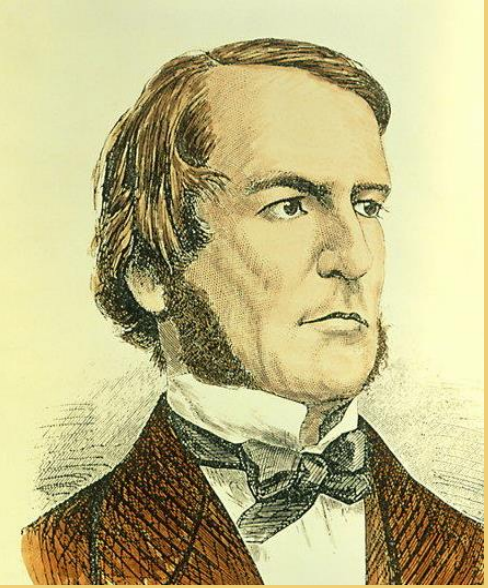
- hierop werd verder gewerkt door Venn, Pierce en Schroeder (*Algebra der Logik*)

- de eigenlijke grondlegger van de moderne logica was Frege :
  - ✓ leidde in *Grundgesetze der Arithmetik* (1893) de ganse rekenkunde af uit de logica
  - ✓ toonde daarmee het belang van de logica in het onderzoek naar de grondslagen van de wiskunde
  - ✓ Russell werkte hieraan verder om ie trachten met de logica de grondslag van de ganse wiskunde te leveren
  - ✓ samen met Whitehead werd dit voor een groot deel gerealiseerd in *Principia Mathematica* (3 delen, 1910-1913)

- Peano in *Arithmetices principa, nova methodo exposito* (1899) gebruikte de logica om
  - ✓ diverse axiomastelsels duidelijk te formuleren
  - ✓ de nauwkeurigheid en de strengheid te controleren

- dit werk werd verder gezet door Hilbert
  - ✓ gebruikte de logica om een strenge bewijsvoering op te bouwen
  - ✓ bestudeerde de algemene eigenschappen van de axiomastelsels :
    - ➢ moeten eenvoudig, volledig, onafhankelijk, consistent

- dit leidde in de 20e eeuw tot de modeltheorie : de studie van wiskundige structuren, zoals groepen, velden, …



George Boole

Lincoln, 1815 - Ballintemple (Irl.), 1864

- Boole kreeg zijn eerste wiskundelessen van vader en bekwaamde zich verder door zelfstudie
- opende in 1835 zijn eigen school in Lincoln
- vanaf 1839 publiceerde hij een reeks van artikelen in de *Cambridge Mathematical Journal*
- in 1847 introduceert hij de Boole-algebra in *The Mathematical Analysis of Logic*
- werd in 1849 benoemd tot professor wiskunde aan Queens' College in Cork (Ierland)
- in *An Investigation of the Laws of Thought* van 1854 formuleerde hij dat de formele logica wiskundig beperkt is ; ja-neen, juist-fout, 1-0, aan-uit, ….

→ **basis van het digitale tijdperk**

- *The Mathematical Theory of Communication* - C. Shannon (1948) betekende de start van de informatietheorie : het verband tussen het gebruik van electro-mechanische relais en de oplossing van problemen uit de Boole-algebra

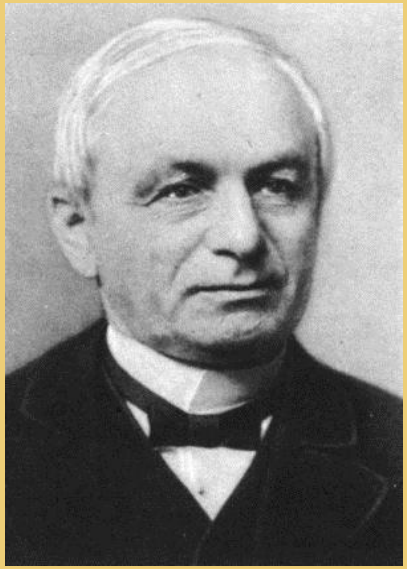
Boole-algebra

- waarden van de variabelen : 1 en 0
- bewerkingen :
  - ✓ conjunctie : AND : ∧
  - ✓ disjunctie : OR : ∨
  - ✓ negatie : NOT : ~
- **bewerkingsregels :**

Eigenschappen	voor conjunctie	voor disjunctie
commutativiteit	x∧y = y∧x	x∨y = y∨x
associativiteit	x∧(y∨z)= (x∧y)∨z	x∨(y∧z)= (x∨y)∧z
distributiviteit	x∧(y∨z)= (x∧y)∨(x∧z)	x∨(y∧z)= (x∨y)∧(x∨z)
identiteit	x ∧ 1 = x	x ∨ 0 = x
neutraliteit	x ∧ 0 = 0	x ∨ 1 = 1
idempotentie	x ∧ x = x	x ∨ x = x
complementariteit	x ∧ ~x = 0	x ∨ ~x = 1
wetten van DeMorgan	~x ∧ ~y ~= ~(x ∨ y)	~x ∨ ~y ~= ~(x y)

Leopold Kronecker

Liegnitz, 1823 - Berlijn, 1891



'Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk'

(Kronecker -1886)

- geboren in een welgestelde Joodse familie
- middelbaar onderwijs aan het Liegnitz Gymnasium,
- studeerde vanaf 1841 wiskunde, sterrenkunde en filosofie aan de universiteit van Berlijn
- promoveerde in 1845 onder Lejeune Dirichlet met een thesis over algebraïsche getallentheorie
- na zijn promotie runde hij een groot familiaal landbouwbedrijf en beoefende wiskunde als hobby
- in 1883 werd hij de opvolger van Kummer als gewoon hoogleraar aan de universiteit van Berlijn

Kroneckers aritmetisering van de wiskunde

- bleef steeds zoeken naar streng wiskundige bewijzen
- zo werd hij overtuigd dat de wiskunde moest opgebouwd worden met het getal als grondslag

✓ voorbeeld : het getal π mag niet worden ingevoerd als de verhouding van de omtrek tot de middellijn van de cirkel,

maar wel via de reeks $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+.....$

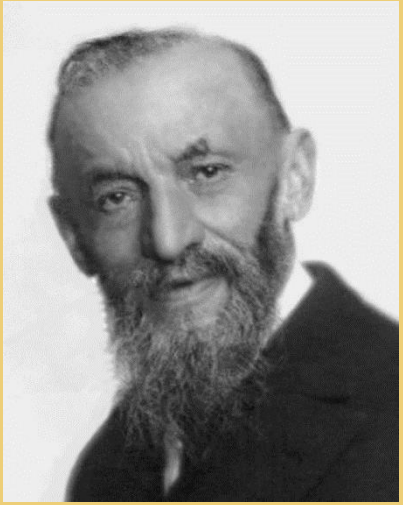
- Kronecker was tegen het gebruik van irrationale getallen en geloofde niet in het bestaan van transcendente getallen

Tegenstander van de verzamelingsleer

- in 1877 trachtte hij de publicatie van het werk van Cantor over de Verzamelingsleer in *Crelle's Journal* te verhinderen
- zo ontstonden grote conflicten met Dedekind, Cantor, Heine en Schwarz

Produkt-formule van Euler

- in 1737 stelde Euler $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p\ priemgetal}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{p^s}}\right)$
- streng bewijs door Kronecker in 1876
- met deze formule werd een link gelegd tussen getaltheorie en analyse



Giuseppe Peano

Spinetta, 1855 - Turijn, 1932

- studeerde aan het Liceo Classica Cavour en aan de universiteit van Turijn van 1876 tot 1880
- assistent en gewoon hoogleraar (1890) Analyse aan de universiteit van Turijn
- in 1886 begon hij met het **Formulario Project**, de samenstelling van een wiskundige encyclopedie
- oprichter in 1890 van het wiskundige tijdschrift *Rivista di Matematica*
- sterk betrokken bij de axiomatisering van de wiskunde
- speelde een leidende rol in de ontwikkeling van de mathematische logica
- hij publiceerde in 1889 de Peano axioma's in *Arithmetices principia, nova methodo exposito*
- Peano introduceerde het symbool ϵ voor 'is element van'
- in 1903 stelde hij de ontwikkeling voor van een kunstmatige taal 'Latino sine flexione'

De axioma's van Peano

→ **een reeks axiomas voor de natuurlijke getallen**

(σ betekent 'de onmiddellijke opvolger van')

$$0 \in \mathbb{N}$$

$$\forall x \in \mathbb{N} : x = x$$

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : x = y \Rightarrow y = x$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N} : x = y \wedge y = z \Rightarrow y = z$$

$$\forall x, y : x = y \wedge x \in \mathbb{N} \Rightarrow y \in \mathbb{N}$$

$$\forall x \in \mathbb{N} : \sigma(x) \in \mathbb{N}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : x = y \Leftrightarrow \sigma(x) = \sigma(y)$$

$$\forall x \in \mathbb{N} : \sigma(x) \neq 0$$

$$V \mid 0 \in V \wedge (\forall x \in \mathbb{N} : x \in V \Leftrightarrow \sigma(x) \in V) \Rightarrow V = \mathbb{N}$$

→ **natuurlijke getallen : bewerkingen en lineaire orde**

$$\forall x \in \mathbb{N} : x + 0 = x$$

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : x + \sigma(y) = \sigma(x + y)$$

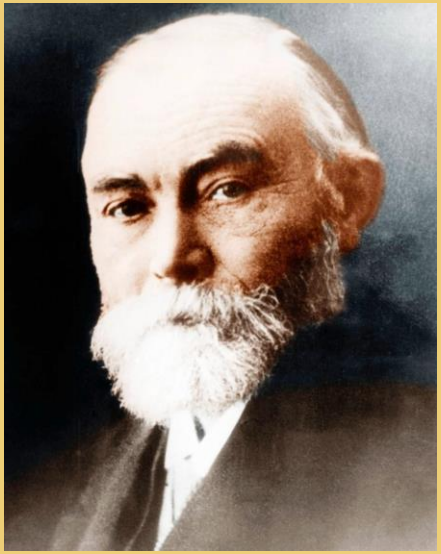
$$\forall x \in \mathbb{N} : x * 0 = 0$$

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : x * \sigma(y) = x + (x * y)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : x \leq y \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{N} : x + z = y$$

Gottlob Frege

Wismar, 1848 - Bad Kleinen, 1925



‘Elke goede wiskundige is minstens een halve filosoof
en elke goede filosoof is minstens een halve wiskundige’
(Frege)

- gymnasium in Wismar, studeerde wiskunde en fysica aan de universiteit van Jena
- behaalde zijn doctoraat in 1873 aan de universiteit van Göttingen
- hij was vanaf 1874 verbonden aan de universiteit van Jena
- de laatste jaren van zijn leven was Frege een verbitterd man
- zijn dagboek toont een diepe haat ten opzichte van Fransen, katholieken en joden

Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens

- publiceerde in 1879 *Begriffsschrift*, waarin hij de Rekenkunde wilde afleiden uit de pure logica
- dit werk is de basis van het Logicisme, waarin wiskunde een deel van de Logica wordt

Die Grundlagen der Arithmetik (1884)

- hij stelt dat alle vroegere definities van het begrip ‘getal’ fouten tegen de logica bevatten
- waarbij de begrippen ‘meervoudigheid’ en ‘getal’ verward worden
- er kwam slechts één enkele reactie op het werk : een zeer negatieve kritiek van Cantor

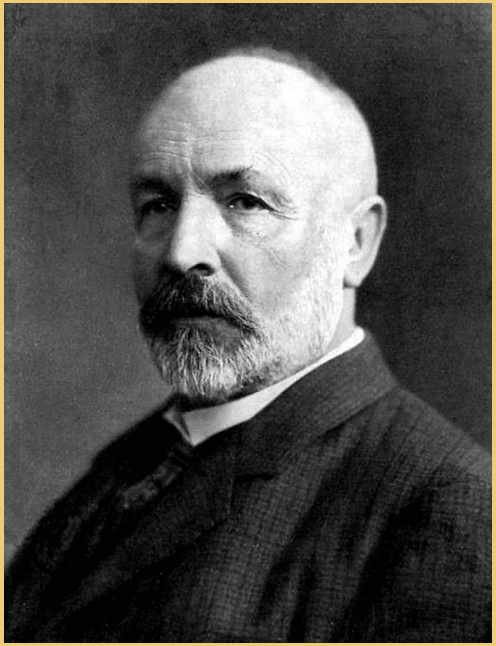
Die Grundgesetze der Arithmetik (2 delen : 1893 – 1e deel, 1903 – 2e deel)

- in het 1e deel worden de wetten van de Rekenkunde afgeleid uit een reeks van logische axioma’s
- dit werk werd totaal genegeerd door zijn tijdgenoten op één enkele reactie van Peano na
- in het 2e deel worden de reële getallen rechtstreeks afgeleid van de gehele getallen (zonder definitie van de rationale getallen)
- het werk bevat een sterke kritiek op de theorie van de irrationale getallen van Dedekind en Cantor
- bij het drukken ontving Frege in een brief van Russell de paradox die een contradictie, weergeeft in zijn axiomastelsel
- in een appendix bij zijn 2e deel wijzigde Frege een van de axioma’s
- hierdoor waren een reeks bewijzen in het 1e deel niet meer geldig
- waarschijnlijk realiseerde Frege zich nooit dat met het gewijzigde axioma zijn systeem inconsistent werd

Georg Cantor

Sint-Petersburg, 1845 - Halle, 1918

de grondlegger van de verzamelingsleer



- de strenge winters in Sint-Petersburg leidden tot emigratie van de familie naar Duitsland
- middelbaar onderwijs aan de Realschule in Darmstadt,
- studeerde aan de universiteiten van Zürich, Berlijn en Göttingen
- in Berlijn volgde hij cursussen van Weierstrass, Kummer en Kronecker
- promoveerde in 1867 in Berlijn met een thesis over Getallentheorie
- in 1869 aangesteld aan de universiteit van Halle en benoemd tot hoogleraar in 1872
- hij bewees in 1870 dat
  - indien een periodieke functie kan worden uitgedrukt als een trigonometrische reeks, dan is deze ontwikkeling éénduidig
  - dit leidde tot de verzamelingsleer
- tijdens een reis naar Zwitserland in 1872 ontmoette hij Dedekind
- dit was het begin van een jarenlange vriendschap en vruchtbare correspondentie
- in 1873 bewees hij dat zowel de rationale getallen, als de algebraïsche getallen aftelbaar oneindig zijn
- en in 1874 bewees Cantor de overaftelbaarheid van de reële getallen
- een publicatie in *Crelle's Journal* van 1777 was oorzaak van scherpe oppositie van Kronecker
- Cantor werd uiteindelijk benoemd tot gewoon hoogleraar in Halle in 1879
- maar het verzet van o.a. Kronecker maakte promotie van Cantor naar belangrijker universiteiten, zoals Berlijn, onmogelijk
- Dedekinds weigering van een leerstoel in Halle betekende het einde van de vriendschap
- van 1879 tot 1884 publiceerde Cantor zijn verzamelingsleer in een reeks van 6 bijdragen aan *Mathematische Annalen*
- zijn verzamelingsleer werd fel bekritiseerd door o.a. Kronecker, Poincaré en König
- de vijfde bijdrage *Grundlagen einer Allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* bevat Cantors repliek op de vele kritiek
- vanaf 1882 publiceerde Cantor ook bijdragen in de *Acta Mathematic* van Mittag-Leffler
- in 1885 volgde de breuk met Mittag-Leffler na een dispuut over een artikel in *Acta Mathematica*
- Cantor kreeg een eerste mentale depressie in 1884, mede door zijn problemen met Kronecker en de kritiek op zijn theorieën
- was medestichter in 1890 van de Deutsche Mathematiker Vereinigung en werd er de eerste president van
- scherpe kritiek van König tijdens het 3e International Congress of Mathematicians (1904) ervaarde hij als een publieke belediging
- Zermelo wees reeds 's anderendaags op Königs foutieve redenering
  - daarna leed Cantor aan chronische depressie en stierf mentaal gestoord en ondervoed in een sanatorium

Over de Naïeve Verzamelingsleer (van Cantor)

Galileo's Paradox

- een deelverzameling van een oneindige verzameling kan even groot zijn als de verzameling zelf

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
1			4					9					...

1	2	3	4	5	6	7	...
1	4	9	16	25	36	49	...

Gelijke en gelijkmachtige verzamelingen

- verzamelingen A en B zijn gelijk indien ze dezelfde elementen hebben : A = B
- de machtsverzameling P(A) van een verzameling A is de verzameling van alle deelverzamelingen, inclusief $\varnothing$ en A
  - ✓ het aantal elementen van de machtsverzameling van een verzameling van n elementen is 2^n
- het kardinaalgetal (kardinaliteit) |V| van een verzameling V is het aantal elementen van de verzameling
- verzamelingen zijn gelijkmachtig indien ze hetzelfde aantal elementen hebben : A ≈ B ⇔ |A| = |B|
  ⇔ verzamelingen zijn gelijkmachtig als er een bijectie tussen de verzamelingen bestaat

Aftelbare en overaftelbare verzamelingen

- een eindige verzameling S met n elementen is **aftelbaar** ; het kardinaalgetal |S| is het aantal elementen van S
- een oneindige verzameling is **aftelbaar oneindig** als er een bijectie bestaat met $\square$
- Cantor gaf aan de verzameling van de natuurlijke getallen het kardinaalgetal 'aleph nul' $\square : |\square| = \aleph_0$
- een oneindige verzameling is **overaftelbaar** als ze niet aftelbaar oneindig is = er geen bijectief verband bestaat met $\square$

Continuüm Hypothese

(CH)

Er bestaat geen verzameling met kardinaalgetal

tussen

het kardinaalgetal van de verzameling van de natuurlijke getallen
en het kardinaalgetal van de verzameling van de reële getallen

- ✓ in **1878** gesteld door **Cantor**
- ✓ in **1900** door **Hilbert** als eerste van zijn lijst van 23 open problemen geplaatst
  - ➢ tevens werd door Hilbert hiermee het bewijs van de *welordeningsstelling* verbonden
- ✓ in **1940** bestudeerd door **Gödel** : *CH is consistent met ZFC*
- ✓ in **1963** bewezen door **Cohen** : *CH is onafhankelijk van ZFC*

David Hilbert

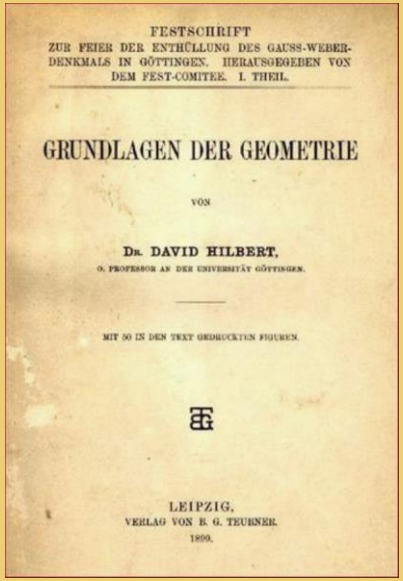
Königsberg 1862 - Göttingen, 1943

de overgang naar de 20e eeuw

- middelbaar onderwijs aan het Friedrichskolleg en het Wilhelm Gymnasium in Königsberg
- behaalde zijn doctoraat aan de universiteit van Königsberg in 1885
- bleef verbonden aan de universiteit van Königsberg tot 1895
- in die tijd ontstond een nauwe samenwerking met Minkowski en Hurwitz
- wer onder impuls van Klein in 1895 benoemd tot professor wiskunde in Götingen
- bleef tot 1933 professor aan de universiteit van Göttingen

Wiskunde aan de universiteit van Göttingen

- Hilbert was de onbetwiste leider van de groep wiskundigen in Göttingen
- 1905 : 4 wiskundeprofessoren : Hilbert, Klein, Minkowski, Runge


FESTSCHRIFT
ZUR FEIER DER ENTHÜLLUNG DES GAUSS-WEBER-DENKMALS IN GÖTTINGEN. HERAUSGEGEBEN VON DEM FEST-COMITEE. I. THEIL.

GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

VON

DR. DAVID HILBERT,
O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.

MIT 50 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1899.

Axiomatisering van de meetkunde

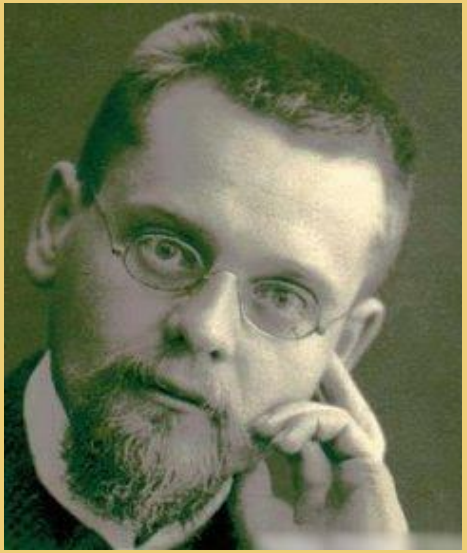
- in 1899 verscheen *Grundlagen der Geometrie*
- het bevat een reeks van 21 axioma's, die de 5 traditionele axioma's van Euclides vervingen
- de axioma's voldoen aan de drie eisen voor een perfect axiomatisch systeem :
  - ✓ **consistentie**
  - ✓ **onafhankelijkheid**
  - ✓ **volledigheid**
- een verdere vereiste bij het opstellen van axiomasystemen : **eenvoudigheid**

De 23 problemen

- op 8 augustus 1900 tijdens zijn toespraak op het Second Congrès des Mathématiciens aan de Sorbonne in Parijs
- Hilbert gaf een opsomming van 10 van zijn lijst van 23 open problemen in de wiskunde
  - de definitieve lijst werd o.a. gepubliceerd in 1902 in het *Bulletin of the American Mathematical Society*
    - dit was tevens de aanzet van vele wiskundige ontwikkelingen in de 20e eeuw

Ernst Zermelo

Berlijn, 1870 – Freiburg im Breisgau, 1953



- studeerde wiskunde, fysica en filosofie aan de universiteiten van Berlijn, Halle en Freiburg
- behaalde in 1894 zijn doctoraat aan de Universiteit van Berlijn
- als assistent van Planck studeerde hij hydrodynamica
- aan de Universiteit van Göttingen behaalde hij zijn Habilitation (1899)
- hoogleraar wiskunde aan de Universiteit van Zürich van 1910 tot 1916,
- nam ontslag wegens zijn zwakke gezondheid
- in 1926 benoemd tot ere-hoogleraar aan de Universiteit van Freiburg
- nam ontslag in 1935 als protest tegen Hitlers regime, herbenoemd op het einde van WO II

Welgeordende verzameling

Een verzameling V met een bewerking *R* is

- partieel geordend :
  - ✓ reflexief : $\forall a \in V : aRa$
  - ✓ antisymmetrisch : $\forall a,b \in V : aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$
  - ✓ transitief : $\forall a,b,c \in V : aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$
- totaal geordend :
  - ✓ partieel geordend
  - ✓ vergelijkbaar $\forall a,b \in V : aRb \vee bRa$
- welgeordend :
  - ✓ elke niet-ledige deelverzameling van een totaal geordende verzameling V bezit een kleinste element voor de bewerking *R*

Welordeningsstelling : elke verzameling kan welgeordend zijn

- in 1904 bewezen door Zermelo
- massaal bekritiseerd wegens een gebrek aan axioma's voor de verzamelingsleer
- is gelijkwaardig met het keuzeaxioma, door Zermelo geformuleerd

De Overgang naar de Axiomatische Verzamelingsleer

Axiomastelsel van Zermelo

- door Zermelo werd in 1908 de eerste axiomatische verzamelingsleer gepubliceerd
- hij koos voor een uitbouw via **7 axioma's**, geformuleerd in verbale vorm
- slaagde er echter niet in om de consistentie van zijn axiomastelsel te bewijzen

ZFC-stelsel

- werd vervolledigd en verfijnd met het **substitutieaxioma** door
  - Abraham Fraenkel (München, 1891 – Jeruzalem, 1865), gepubliceerd in 1922
  - Thoralf Skolem (Sandsvär, 1887 – Oslo, 1963), ontdekt in 1922 en gepubliceerd in 1923
- in 1925 completeerde John von Neumann (Budapest, 1903 – Washington, 1957) de ZF-theorie
  - het **regulariteitsaxioma** (funderingsaxioma) werd bijgevoegd
- Zermelo incorporeerde beide axioma's in zijn ZF-axiomastelsel van 1930
- ZF-theorie, vervolledigd met het **keuzeaxioma** (of iets gelijkwaardigs), leidde tenslotte naar het ZFC-axiomastelsel

De Overgang naar de Axiomatische Verzamelingsleer

- In 1908 formuleerde Zermelo de eerste axiomatische verzamelingsleer : 7 axioma's

Axioma I **AXIOMA VAN EXTENSIONALITEIT**
Axioma II **AXIOMA VAN ELEMENTAIRE VERZAMELINGEN**
Axioma III **AXIOMA VAN SEPARATIE**
Axioma IV **AXIOMA VAN DE MACHTSVERZAMELING**
Axioma V **AXIOMA VAN DE UNIE**
Axioma VI **KEUZEAXIOMA**
Axioma VII **AXIOMA VAN ONEINDIGHEID**

- uitgebreid en verfijnd vervolledigd in 1922/23 door Fraenkel en Skolem met

Axioma VIII **FUNDERINGSAXIOMA – REGULARITEITSAXIOMA**

- vervolledigd in 1925 door von Neumann

Axioma IX **SUBSTITUTIEAXIOMA – VERVANGINGSAXIOMA**

- in 1930 publiceerde Zermelo het ZF-axiomastelsel : al deze axioma's **zonder het keuzeaxioma**

- het ZF-axiomastelsel vervolledigd **met het keuzeaxioma** (of iets gelijkwaardigs) leidde tenslotte tot het ZFC-axiomastelsel

Axioma I **AXIOMA VAN EXTENSIONALITEIT**
Axioma II **AXIOMA VAN ELEMENTAIRE VERZAMELINGEN**
Axioma III **AXIOMA VAN SEPARATIE**
Axioma IV **AXIOMA VAN DE MACHTSVERZAMELING**
Axioma V **AXIOMA VAN DE UNIE**
Axioma VII **AXIOMA VAN ONEINDIGHEID**
Axioma VIII **FUNDERINGSAXIOMA – REGULARITEITSAXIOMA**
Ajoma IX **SUBSTITUTIEAXIOMA – VERVANGINGSAXIOMA**
+ Axioma VI **KEUZEAXIOMA**

De Overgang naar de Axiomatische Verzamelingsleer

De oorspronkelijke vorm van de axioma's van Zermelo (1908)

Axioma I **AXIOMA VAN EXTENSIONALITEIT** (*AXIOM DER BESTIMMTHEIT*). *(AXIOM OF EXTENSIONALITY)*
Als elk element van een verzameling *M* ook een element is van *N* en omgekeerd, dan is M = N. (zijn de verzamelingen M en N identiek)

Axioma II **AXIOMA VAN ELEMENTAIRE VERZAMELINGEN** (*AXIOM DER ELEMENTARMENGEN).(AXIOM OF ELEMENTARY SETS)*
Er bestaat een verzameling, de ledige, ∅, die geen elementen bevat.
Voor elk object *a* van het domein bestaat er een verzameling {*a*} die alleen *a* als element bevat.
Als *a* en *b* twee objecten zijn uit het domein, bestaat er altijd een verzameling {*a*, *b*} die beide objecten *a* en *b* bevat.

Axioma III **AXIOMA VAN SEPARATIE** (*AXIOM DER AUSSONDERUNG*) *(AXIOM OF SEPARATION)*
Wanneer de propositionele functie *p(x)* gedefinieerd is voor alle elementen van een verzameling *M*, dan bevat *M* een deelverzameling die juist alle elementen *x* uit *M* bevat waarvoor *p(x)* waar is.

Axioma IV **AXIOMA VAN DE MACHTSVERZAMELING** (*AXIOM DER POTENZMENGE*). *(AXIOM OF THE POWER SET)*
Met elke verzameling *T* correspondeert een verzameling, genaamd de machtsverzameling van T, die als elementen precies alle deelverzamelingen van *T* bevat.

Axioma V **AXIOMA VAN DE UNIE** (*AXIOM DER VEREINIGUNG).(AXIOM OF THE UNION)*
Met elke verzameling T correspondeert een verzameling ∪*T*, de unie van *T*, die als elementen precies alle elementen van de elementen van *T* bevat.

Axioma VI **KEUZEAXIOMA** (*AXIOM DER AUSWAHL) (AXIOM OF CHOICE)*
Als *T* een verzameling is waarvan de elementen verzamelingen zijn verschillend van ∅ en onderling disjunct, bevat de unie ∪*T* ten minste één deelverzameling die één en slechts één element gemeen heeft met elk element van *T.*

Axioma VII **AXIOMA VAN ONEINDIGHEID** (*AXIOM DES UNENDLICHEN).(AXIOM OF INFINITY)*
Er bestaat ten minste één verzameling in het domein die de ledige verzameling als element bevat, en zo is opgebouwd dat voor elk van zijn elementen *a,* ook het element van de vorm {a, {a}} erin bevat is

Het ZFC-axiomastelsel

Axioma I **AXIOMA VAN EXTENSIONALITEIT** (*AXIOM DER BESTIMMTHEIT*). *(AXIOM OF EXTENSIONALITY)*
Als elk element van een verzameling *M* ook een element is van *N* en omgekeerd, dan is M = N. (zijn de verzamelingen M en N identiek)

Axioma II **AXIOMA VAN ELEMENTAIRE VERZAMELINGEN** (*AXIOM DER ELEMENTARMENGEN).(AXIOM OF ELEMENTARY SETS)*
Er bestaat een verzameling, de ledige, ∅, die geen elementen bevat.
Voor elk object *a* van het domein bestaat er een verzameling {*a*} die alleen *a* als element bevat.
Als *a* en *b* twee objecten zijn uit het domein, bestaat er altijd een verzameling {*a*, *b*} die beide objecten *a* en *b* bevat.

Axioma III **AXIOMA VAN SEPARATIE** (*AXIOM DER AUSSONDERUNG*) *(AXIOM OF SEPARATION)*
Wanneer de propositionele functie *p(x)* gedefinieerd is voor alle elementen van een verzameling *M*, dan bevat *M* een deelverzameling die juist alle elementen *x* uit *M* bevat waarvoor *p(x)* waar is.

Axioma IV **AXIOMA VAN DE MACHTSVERZAMELING** (*AXIOM DER POTENZMENGE*). *(AXIOM OF THE POWER SET)*
Met elke verzameling *T* correspondeert een verzameling, genaamd de machtsverzameling van T, die als elementen precies alle deelverzamelingen van *T* bevat.

Axioma V **AXIOMA VAN DE UNIE** (*AXIOM DER VEREINIGUNG).(AXIOM OF THE UNION)*
Met elke verzameling T correspondeert een verzameling ∪*T*, de unie van *T*, die als elementen precies alle elementen van de elementen van *T* bevat.

Axioma VI **KEUZEAXIOMA** (*AXIOM DER AUSWAHL) (AXIOM OF CHOICE)*
Als *T* een verzameling is waarvan de elementen verzamelingen zijn verschillend van ∅ en onderling disjunct, bevat de unie ∪*T* ten minste één deelverzameling die één en slechts één element gemeen heeft met elk element van *T.*

Axioma VII **AXIOMA VAN ONEINDIGHEID** (*AXIOM DES UNENDLICHEN).(AXIOM OF INFINITY)*
Er bestaat ten minste één verzameling in het domein die de ledige verzameling als element bevat, en zo is opgebouwd dat voor elk van zijn elementen *a,* ook het element van de vorm {a, {a}} erin bevat is

Axioma VIII **FUNDERINGSAXIOMA – REGULARITEITSAXIOMA** *(AXIOM DER FUNDIERUNG) (AXIOM OF FOUNDATION)*
Elke niet-ledige verzameling V bevat een element x dat disjunct is van V

Axioma IX **SUBSTITUTIEAXIOMA – VERVANGINGSAXIOMA** *(ERSETZUNGSAXIOM) (AXIOM OF SUBSTITUTION)*
Het beeld van een verzameling door een functie is een verzameling

Hermann Weyl

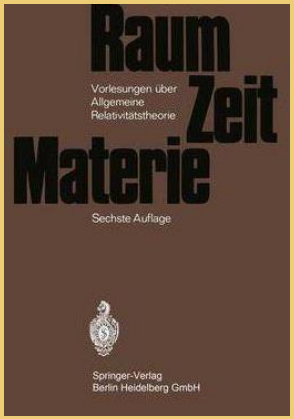
Elmshorn, 1885 – Zürich,1955

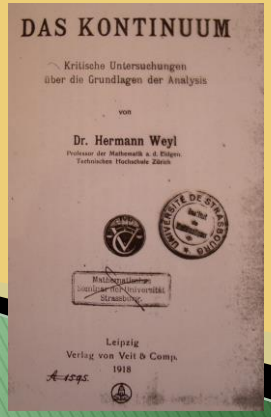
- van 1904 tot 1908 studeerde hij wiskunde en fysica in Göttingen en München
- hij behaalde zijn doctoraat onder Hilbert aan de Universiteit van Göttingen
- tot 1913 doceerde hij in Göttingen
- van 1916 tot 1930 was hij professor Wiskunde aan de ETH Zürich
- in 1930 werd hij de opvolger van Hilbert aan de Universiteit van Göttingen
- omdat zijn echtgenote joodse was, verliet hij Göttingen in 1933, bij de opkomst van de Nazi's
- aanvaarde een professoraat aan het Institute for Advanced Study in Princeton
- vanaf 1952 verbleef hij afwisselend in Princeton en in Zürich

- zijn oudste zoon **Fritz Weyl** (1915-1977) was ook een bekend wiskundige

Relativiteitstheorie

- Weyl was van bij het begin sterk onder de indruk van het werk van Einstein
- hij schetste de ontwikkeling van de relativiteitstheorie in *Raum, Zeit, Materie* (1918, reeds in 1922 volgde de 4e editie)





Ouantummechanica

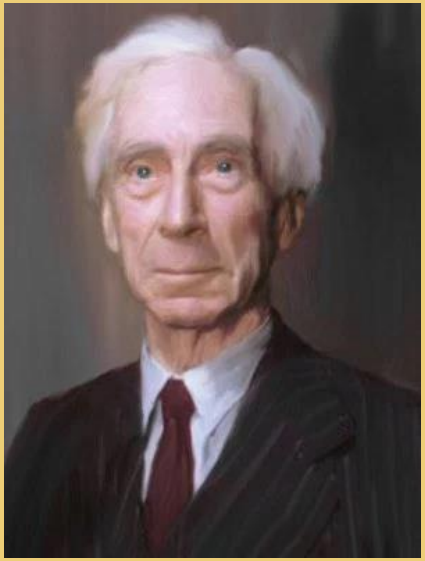
- één van zijn belangrijkste werken *Gruppentheorie und Quantummechanik* uit 1928
- hierin wordt de groepentheorie aangepast voor toepassing op de quantummechanica

Grondslagen van de Wiskunde

- in *Das Kontinuum* (1918) ontwikkelde Weyl de analyse, zonder gebruik te maken van
  - ✓ bewijzen uit het ongerijmde
  - ✓ de oneindige verzamelingen van Cantor
  - ✓ het keuzeaxioma
- kort daarna werd hij een aanhanger van het **intuitionisme** van Brouwer
- vanaf 1920 ontdekte hij dat de wiskunde hierdoor te veel beperkingen werden opgelegd
- in 1928 volgde zijn zienswijze opnieuw de ideeën van Husserl en Hilbert (**formalisme**)

Bertrand Russell

Trellech (Wales), 1872 – Penrhyndeudreath (Wales), 1970



- geboren in een aristocratische Britse familie, kende een eenzame jeugd,
- studeerde wiskunde en filosofie
- schreef *The Principles of Mathematics* (1903)
- samen met **Whitehead** (1861–1947) publiceerde hij *Principia Mathematica* (3 dln., 1910-1913)
- als actieve pacifist tijdens WO I gevangenschap van 6 maanden in Brixton
- voerde campagne tegen Hitler, bekritizeerde Stalins totalitarisme
- overleefde een vliegtuigcrash in 1948 en streefde naar een totaal verbod op kernwapens
- voor zijn totale oeuvre, zowel wetenschappelijk als filosofisch, ontving hij de Nobelprijs literatuur in 1951
- vanaf 1960 fervent tegenstander van Israels politiek in het Midden-Oosten

Russels paradox

- de verzameling S van alle verzamelingen die zichzelf niet bevatten (die geen element zijn van zichzelf) $S = \{V \mid V \notin V\}$

  indien S zichzelf bevat, dan, per definitie, mag S zichzelf niet bevatten
  indien S zichzelf niet bevat, dan, per definitie, moet S zichzelf bevatten

  $$S \in S \Leftrightarrow S \notin S$$

- vermeldde de paradox in 1902 aan Gottlob Frege, juist voor het drukken van diens *Grundgesetze der Arithmetik* in een Appendix erkende Frege het probleem, stelde een oplossing voor, die echter als onvoldoende werd beschouwd

- in 1908 claimde Ernst Zermelo de prioriteit van de paradox (reeds vermeld in een brief aan Hilbert omstreeks 1900)

- de paradox bracht de hele wiskunde aan het wankelen

→ **grondslagencrisis**

De Grondslagencrisis van de Wiskunde

grondslagenonderzoek

- sedert de 18e eeuw hebben vele wiskundigen gewerkt aan het definiëren van de grondslagen van de wiskunde :
  - Euler, Dedekind, Frege, Peano, Russell, …
- 'paradoxen van de verzamelingsleer' maakten dit onderwerp zeer actueel op het einde de 19e en het begin van de 20e eeuw

verschillende stromingen

- **logicisme** :
  - ✓ beschouwt de wiskunde als deel van logica en wil dus wiskunde reduceren tot logica (wiskunde = logische proposities)
  - ✓ deze stroming werd opgestart door Frege in 1884 en verder ontwikkeld door Russell en Whitehead vanaf 1902
  - ✓ ook de axiomatische verzamelingsleer van Zermelo en Fraenkel volgt deze stroming
- **intuïtionisme** :
  - ✓ stelt dat wiskundige 'objecten' worden geconstrueerd in de menselijke geest,
  - ✓ en hierin intuïtief blijven bestaan, gebaseerd op vanzelfsprekende wetmatigheid
  - ✓ voortrekkers van deze stroming zijn o.a. de Nederlandse wiskundigen Brouwer (1881–1966) en Heyting (1898-1980)
  - ✓ intuïtionisten verwerpen de regel van de uitgesloten derde : 'elke uitspraak is ofwel waar of niet waar'
  - ✓ hieruit volgt o.a. het niet aanvaarden van het bewijs uit het ongerijmde
- **formalisme** :
  - ✓ sterk gestimuleerd door Hilbert
  - ✓ wil voor elk wiskundig begrip een volledig en consistent axiomastelsel formuleren (ontwikkelen)
  - ✓ dit standpunt ontspoorde compleet in 1931 door de onvolledigheidsstelling # 1 van Gödel

grondslagencrisis

- vanaf ca.1920 waren de wiskundigen het grondig oneens over wat de precieze fundamenten van de wiskunde zijn
- de verschillende stromingen bleven werken vanuit de eigen invalshoeken
- elkaars standpunten werden fel bestreden

⇒ **geen enkele stroming is er in geslaagd een volkomen bevredigende oplossing voor de grondslagen van de wiskunde te bieden**

Amalia Emmy Noether

Erlangen, 1882 – Bryn Mawr, Pennsylvania,1935

de grootste vrouwelijke wiskundige

- geboren in een joodse, wiskundig begaafde, familie
- van 1900 tot 1904 studeerde ze wiskunde aan de Universiteiten van Erlangen en Göttingen
- ze behaalde haar doctoraat aan de Universiteit van Erlangen, in 1907
- van 1908 tot 1915 doceerde ze, niet-gesalarieerd, aan de Universiteit van Erlangen
- in 1915 werd ze door Hilbert en Klein naar Göttingen uitgenodigd, waar ze bleef tot 1933
- het duurde tot 1919 alvorens ze een klein salaris kreeg voor haar leeropdrachten
- vanaf 1920 werd ze een pionier van de Moderne Algebra
- in 1921 verscheen haar standaardwerk *Idealtheorie in Ringbereichen*
- in 1924 studeerde **B.L. van der Waerden** bij Noether in Göttingen
    - ✓ daar legde hij de basis van zijn tweedelig standaardwerk *Moderne Algebra*
    - ✓ het tweede deel ervan bevat hoofdzakelijk wiskundige ideeën van Noether
- in 1933 verboden de Nazi's haar de auditoria van de universiteit te gebruiken ; ze reageerde door bij haar thuis te doceren
- na haar ontslag werd ze door het Bryn Mawr College uitgenodigd als gastprofessor
- in 1934 werden uitgezaaide tumoren ontdekt en ze overleed in april 1935
- in de New York Times van 5 mei 1935 verscheen een 'in memoriam' geschreven door Einstein

Wiskundige bijdragen

- stelling van Noether (1915) : **elke symmetrie-eigenschap van een systeem leidt tot een behoudswet**

- grondlegster van de abstracte algebra :
    - ✓ ontwikkeling van de commutatieve ringtheorie
    - ✓ conceptuele wiskunde : relaties tussen getallen, functies en bewerkingen worden slechts algemeen toepasbaar als ze geïsoleerd zijn van hun specifiek objecten en als universeel geldend zijn geformuleerd

Kurt Gödel

Brünn (Brno), 1906 - Princeton, 1978

- geboren in een etnisch Duitse familie in Brünn (Oostenrijk-Hongarijë)
- werd in 1918 Tsjechoslowaak bij het uiteenvallen van het Oostenrijks-Hongaarse keizerrijk
- verkoos de Oostenrijkse nationaliteit in 1929 en werd Duitser na de annexatie in 1938
- studeerde vanaf 1924 aan de universiteit van Wenen en behaalde zijn doctoraat in 1930
- werd sterk beïnvloed door Hilberts *Grundzüge der theoretischen Logik,* wat leidde tot de publicatie in 1931 van zijn onvolledigheidsstellingen
- bezocht de Verenigde Staten in 1933 en werd bevriend met Einstein
- gaf een reeks lezingen aan het IAS in Princeton
- in 1937 concludeerde Gödel dat noch de continuümhypothese, noch het keuzeaxioma kunnen worden weerlegd door het systeem van axioma's van de verzamelingsleer
- ontwikkelde vanaf 1936 paranoïde trekken en verbleef een aantal maanden in een sanatorium voor zenuwzieken
- hij verliet Wenen tegen het einde van 1939 en week uit naar de Verenigde Staten
- werd in 1946 permanent lid van het IAS, werd benoemd tot hoogleraar in 1953
- verkreeg in 1947 het Amerikaans burgerschap ; zijn getuigen waren Einstein en Morgenstern
- overleed in 1976 in het ziekenhuis van Princeton aan ondervoeding en uitputting ten gevolge van een persoonlijkheidsstoornis

Onvolledigheidsstellingen (1931)

- Onvolledigheidsstelling # 1 :
  elk axiomatisch wiskundig systeem, dat alle basiseigenschappen van de natuurlijke getallen kan bewijzen, is
  ofwel *onvolledig* : er zijn ware uitspraken die niet bewezen kunnen worden
  ofwel *inconsistent* : er zijn onware uitspraken die wel bewezen kunnen worden
- Onvolledigheidsstelling # 2 :
  de formele rekenkunde kan haar eigen consistentie niet bewijzen

Continuümhypothese en **Keuzeaxioma**

in 1937 concludeerde Gödel dat noch de continuümhypothese, noch het keuzeaxioma kunnen worden weerlegd door het systeem van axioma's van de verzamelingsleer

Paul Cohen

Long Branch, New Jersey, 1934 - Stanford, California, 2007

- zoon in een uit Polen uitgeweken joodse familie, opgegroeid in Brooklyn
- secundair onderwijs aan de Stuyvesant High School; New-York
- aan de universiteit van Chicago werd hij master in de wiskunde in 1954
- toonde sterke interesse in getallentheorie en studeerde in Chicago onder André Weil
- promoveerde er tot PhD in 1958 ; onder leiding van A. Zygmund
- assistant in 1961 en hoogleraar wiskunde in 1964 aan de Stanford University, Californië
- laureaat van de Fields medaille in 1966 voor zijn werk aan de Continuum Hypothesis
- een goede pianist en violist en sprak vloeiend Engels, Frans, Spaans, Duits en Yiddish

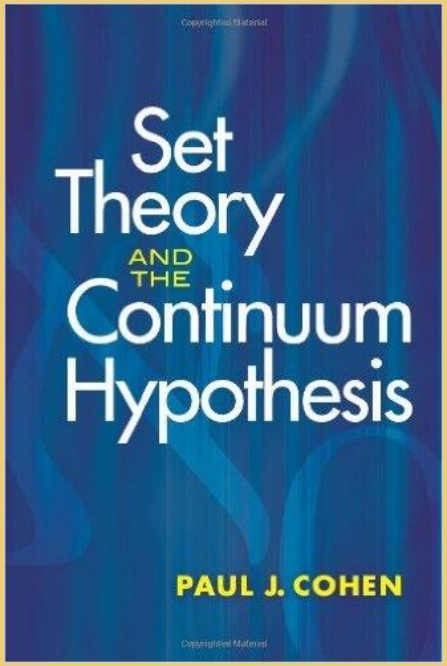
Continuüm Hypothese en **Keuzeaxioma**

- beide axioma's kunnen niet bewezen worden uit de ZF-axioma's
- Gödel bewees reeds dat uit de ZF-axioma's ook niet kan worden bewezen dat beide axioma's niet waar zijn

→ **zowel de Continuüm Hypothese als het Keuzeaxioma zijn onafhankelijk van de ZF-axioma's**

- gepubliceerd in twee artikelen

The Independence of The Contininuum Hypothesis I en II in 1963 en 1964



Paul Cohens standaardwerk, zoals verschenen als Dover boek

John von Neumann

Budapest, 1903 - Washington, 1957

- geboren in een rijke joodse adellijke familie in het Oostenrijks-Hongaarse keizerrijk
- op jeugdige leeftijd was zijn wiskundig talent reeds overduidelijk
- studies scheikundig ingenieur aan de universiteit van Berlijn (1923) en de ETH Zürich (1926)
- studeerde ondertussen wiskunde aan de universiteit van Budapest
- behaalde in 1926 zijn doctoraat met een axiomatisering van de verzamelingsleer van Cantor
- met een Rockweller Fellowship studeerde hij postdoctoraal onder Hilbert in Göttingen (1926/7)
- gastprofessor in Princeton in 1930, professor aldaar van 1931 tot 1933
- in 1933 werd hij één van de 6 oorspronkelijke professoren Wiskunde aan het IAS, Princeton :
  - J. Alexander, A. Einstein, M. Morse, O. Veblen, J. von Neumann, H. Weil
- bij de machtsovername door de Nazi's in 1933 gaf hij zijn academische posities in Duitsland op
- genieter van de aangename dingen van het leven, stierf aan bot- of pancreaskanker

Verzamelingsleer

- door het *funderingsaxioma* vermeed von Neumann in 1925 het bestaan van sets die behoorden tot zichzelf

$$\forall x\,(x \neq \varnothing \rightarrow \exists y \in x\,(y \cap x = \varnothing))$$

Quantummechanica

- publiceerde in 1932 *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*
- de twee theorieën, deeltjesbenadering van Heisenberg en golfbenadering van Schrödinger, zijn wiskundig equivalent

Manhattan-project

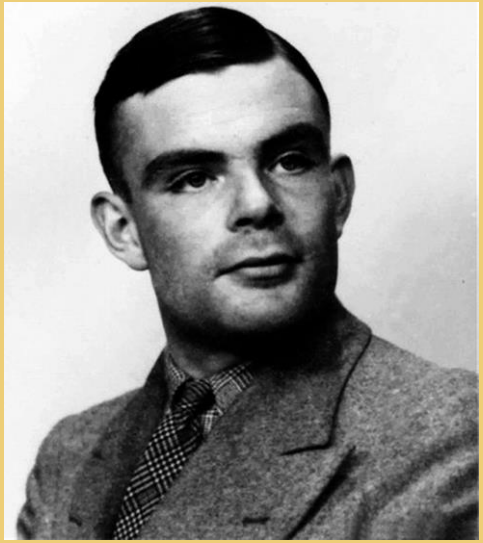
- research voor en ontwikkeling van de eerste nucleaire wapens
- ontwikkelde het concept en design van het mechanisme voor de implosie van de plutonium kern

Speltheorie

- gepubliceerd, samen met O. Morgenstern in *Theory of Games and Economics Behaviour* (1944)

Computerarchitectuur

- medewerker aan de ontwikkeling van de ENIAC computer



Alan Turing

Londen, 1912 - Wilmslow, Cheshire, 1954

- studeerde vanaf 1931 wiskunde aan King's College van de universiteit van Cambridge
- tijdens zijn fellowship in 1935 publiceerde hij *On computable numbers*
- hierin ontwikkelde hij de 'Turing machine', een abstracte rekenmachine
- behaalde in 1938 een doctoraat aan de universiteit van Princeton
- hiervoor studeerde hij wiskunde en cryptologie, o.a. bij A. Church
- terug in Cambridge studeerde hij nog bij L. Wittgenstein (fundamenten van de wiskunde)

- in 1938 trad hij in dienst van de Britse Government Code and Cypher School om te trachten de Duitse Enigma-code te breken
- daar werd de 'Bombe' ontwikkeld, een machine die de Duitse lucht- en zeemacht-berichten van de Enigma kon ontcijferen
- in maart 1946 ontwierp hij de computer voor het National Physical Laboratory in Londen

- vanaf 1948 was hij aan de universiteit van Manchester verantwoordelijk voor het wiskundig aspect van een nieuwe computer

Laatste jaren

- aanvang 1952 in beschuldiging gesteld en veroordeeld voor onzedelijk (homoseksueel) gedrag
- veroordeeld tot gevangenschap, omgezet in probatie met verpllchte hormonale behandeling
- als gevolg hiervan
  - ✓ geen consultancy meer voor de Government Communications Headquarters
  - ✓ verbod om naar de Verenigde Staten te reizen
- pleegde zelfmoord (7 juni 1954) door cyanide-vergiftiging

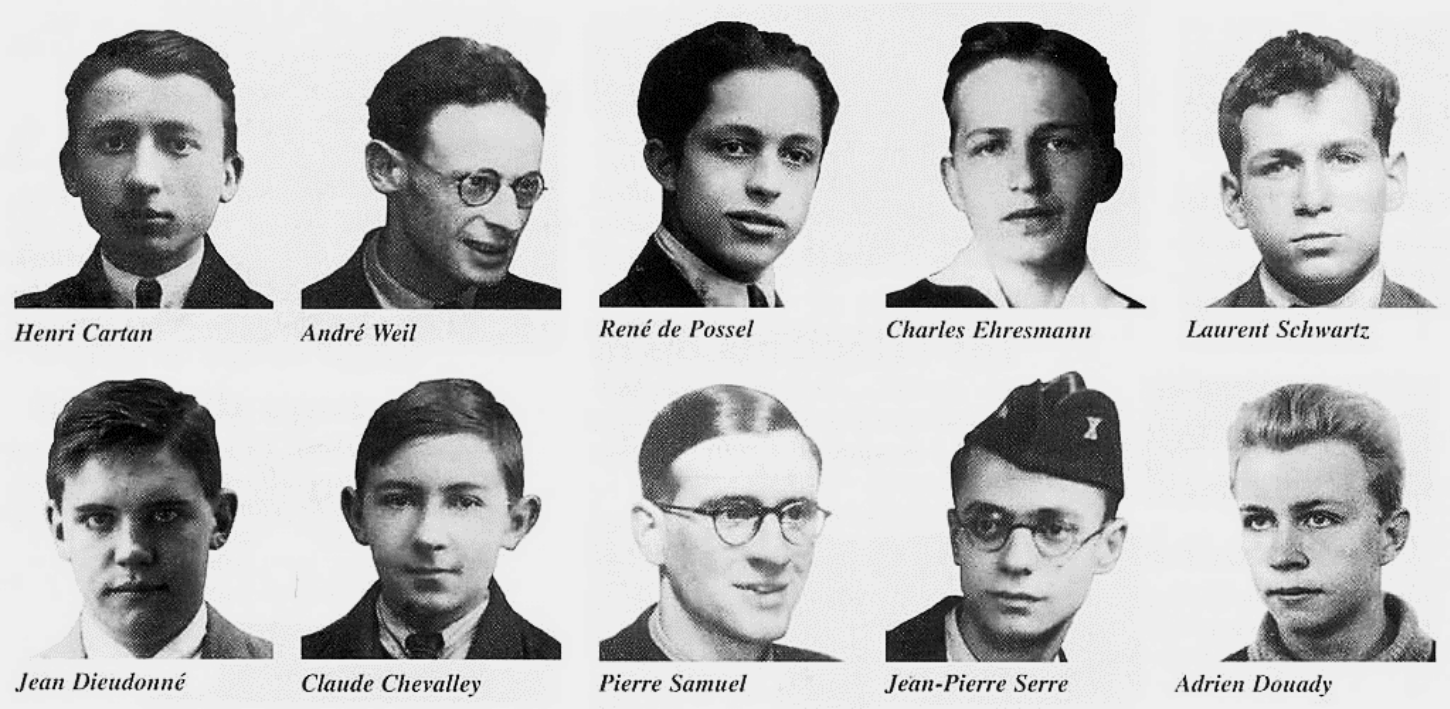
Eerherstel

- ✓ in september 2009 verkreeg hij postuum excuses vanwege de Britse regering
- ✓ op 24 december 2013 werd hem door koningin Elisabeth gratie verleend en werd zijn veroordeling geschrapt

Nicolas Bourbaki

- collectief pseudoniem voor een groep franse wiskundigen, meestal studenten van de Ecole Normale Supérieure van Parijs

stichtende leden		andere leden	
Henri Cartan	Nancy, 1904 – Parijs,2008	**Laurent Schwartz**	Parijs, 1915 – Parijs, 2002
André Weil	Parijs, 1906 – Princeton, NJ, 1998	**Jean-Pierre Serre**	Bages, 1926 –
Jean Dieudonné	Lille, 1906 – Parijs,1992	**Alexandre Grothendieck**	Berlijn, 1926 – Saint-Girons, 2014
Jean Coulomb	Blida, 1904 – Parijs, 1999	**Serge Lang**	St-Germain-en-Laye, 1927 – Berkeley, Ca, 2005
Szolem Mandelbrot	Warschau, 1899 – Paris, 1980	**Roger Godement**	Le Havre, 1921 –
Jean Delsarte	Fourmies, 1903 – Nancy, 1968	**Armand Borel**	La Chaud-de-Fonds, 1923 – Princeton,NJ, 2003
René de Possel	Marseille, 1905 – Parijs, 1974	**Pierre Samuel**	Parijs, 1921 – Paris, 2008
Charles Ehresmann	Strasbourg, 1905 – Amiens, 1979	**Adrien Douady**	La Tronche, 1935 – Saint-Raphaël, 2006
Claude Chevalley	Johannesburg, 1909 – Parijs, 1984		

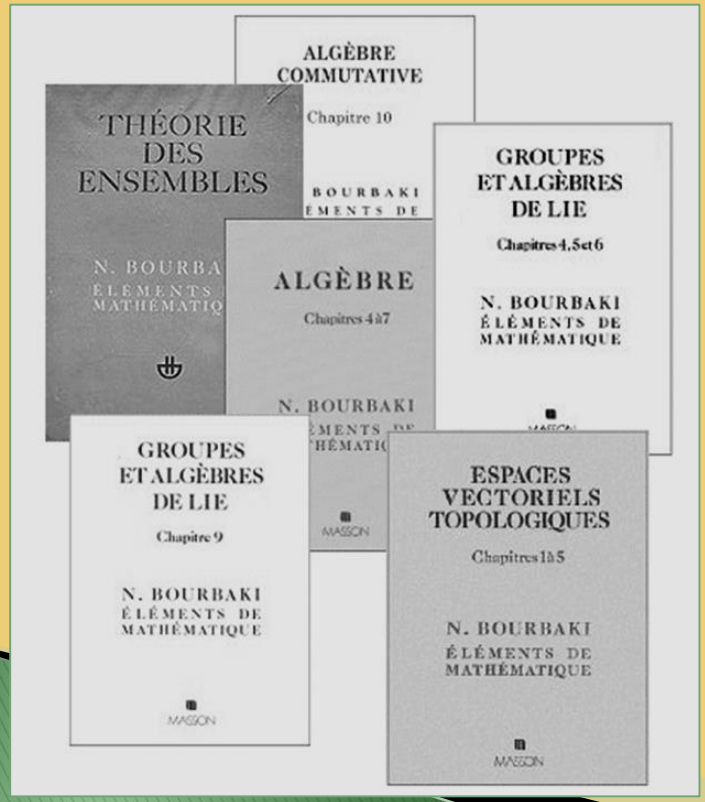


Nicolas Bourbaki

- in de twintiger jaren was er een gebrek aan jonge wiskundigen, als gevolg van de vele doden tijdens WO I
- die jonge wiskundigen waren ontevreden met de toenmalige gebruikelijke wiskundeboeken,
    - o.a. *Traité d'Analyse* van Goursat

- eerste meeting op 10 december 1934 in Café A Capoulade, Boulevard Saint-Michel, Paris
- in juli 1935 komt de groep voor het eerst samen in Besse-en-Chandesse (Puy-de-Dôme)
- om frisse ideeën te genereren,werd beslist dat op 50-jarige leeftijd een lid de groep moet verlaten
- de namen van de huidige leden van Bourbaki worden geheim gehouden

- het project van de groep wordt het uitgeven van een reeks handboeken *Eléments de mathématique*
- met als doel de ganse wiskunde te baseren op de verzamelingsleer
- het eerste boek *Théorie des Ensembles* verschijnt in 1939



Werken van Bourbaki

Oorspronkelijk gepland :

1 Théorie des Ensembles
2. Algèbre
3. Topologie générale
4. Fonctions d'une varable réelle
5. Espaces vectoriels topologiques
6. Intégration

Later bijgevoegd :

7. Algèbre commutative
8. Groupes et algèbres de Lie
9. Théorie spectrales
10. Topologie algébrique

Aanvullingen en uitbreidingen zijn nog verschenen in 1998, 2012 en 2016