



## WISKUNDE IS (EEN BEETJE) OORLOG

Onder dit motto nodigt de VVWL alle wiskundeleraren uit Vlaanderen en Nederland uit om deel te nemen aan een wiskundewedstrijd. Deze competitie heeft op de eerste plaats als doel het probleemoplossend denken aan te moedigen. De wedstrijd zal vier edities kennen (van 2014 tot 2018 – met een knipoogje naar de herdenking van Wereldoorlog I).

### HET VERLOOP VAN DE WEDSTRIJD (VIERDE EN LAATSTE EDITIE)

Hierbij vind je de tien opgaven voor het schooljaar 2017-2018. Het is de bedoeling bij elke opgave een constante te bepalen.

Het vinden van een bewijs voor elk van deze opgaven zien we eerder als een uitdaging voor de leraren en zeker ook voor de leerlingen. Om geldig deel te nemen aan deze derde editie volstaat het VIJF van de TIEN constanten correct te bepalen en de correcte waarden (voorbeeld:  $\sqrt{20}$  of  $2\sqrt{5}$  en niet  $4,472\dots$ ,  $\sqrt{0,3}$  of  $\sqrt{\frac{3}{10}}$  en niet  $0,5477\dots$ ,  $\pi$  en niet  $3,14\dots$ ) in te vullen op het antwoordformulier. Men hoeft dus niet alle vragen op te lossen en foutieve antwoorden leveren geen negatieve score op. Hierbij vind je ook het antwoordformulier; dat is vanaf 1 oktober 2017 in digitale vorm te vinden op de website [www.vvwl.be](http://www.vvwl.be) en op [www.gnomon.bloggen.be](http://www.gnomon.bloggen.be). Het ingevulde deelnemingsformulier dient uiterlijk op 6 december 2017 doorgemailed te worden naar [vvwl1418@gmail.com](mailto:vvwl1418@gmail.com).

Deelname aan deze wedstrijd is gratis.

### PRIJZENPAKKET

Voor de vierde (en laatste!) editie van deze wedstrijd hebben we een uitgebreid prijzenpakket voorzien: didactisch materiaal van CASIO, drie spellendozen van SMART GAMES en vijf boeken 'Twee plus twee is vijf' (auteur L. Gheysens) van uitgeverij DIE KEURE.

De prijzen zullen worden verloot onder alle deelnemers die minstens VIJF van de TIEN constanten correct hebben bepaald. De namen van de winnaars zullen in januari 2018 verschijnen op de website [www.vvwl.be](http://www.vvwl.be). Begin 2018 zullen de prijzen worden bezorgd.

Idee en uitwerking: dr. Luc Gheysens en Daniël Tant.

Met dank aan de sponsors.

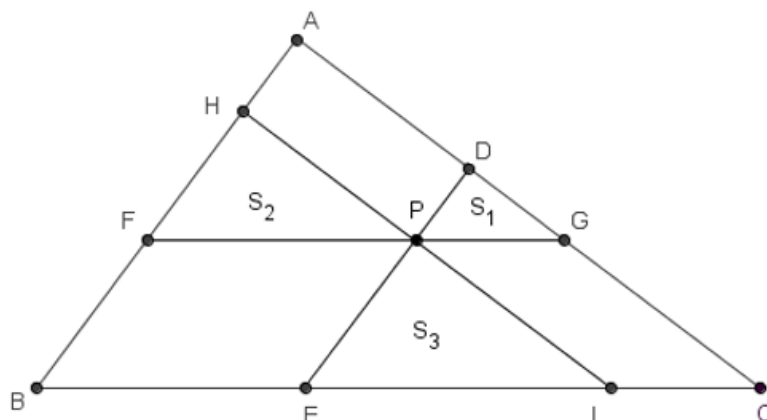


## DE OPGAVEN VAN DE VIERDE EDITIE

### CONSTANTE 31

P is een willekeurig punt binnen een driehoek ABC waarvan de zijden lengte 3, 4 en 5 hebben. Door P trekt men een evenwijdige aan de drie zijden van driehoek. Op die manier bekomt men de driehoeken DPG, HFP en PEI zoals op de onderstaande figuur.

Met  $S_1$ ,  $S_2$  en  $S_3$  duiden we de oppervlakte aan van deze drie driehoeken.



- Toon aan dat  $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$  constant is.
- Waarom is die constante gelijk?

### CONSTANTE 32

De rij  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, \dots$  is een meetkundige rij met reden  $q = 4$ .

Als  $s_n = t_n + t_{n+1}$  en  $p_n = t_n \cdot t_{n+1}$  respectievelijk de som en het product zijn van de  $n$ -de en de  $(n + 1)$ -de term van deze rij, dan definiëren we hiermee een nieuwe rij met als algemene term

$$u_n = \frac{s_n}{p_n}.$$

- Toon aan de verhouding  $\frac{u_n}{u_{n+1}}$  van twee opeenvolgende termen uit deze rij constant is, d.w.z. onafhankelijk van  $n$ .
- Hoeveel is die constante?

### CONSTANTE 33

Driehoek ABC is een gelijkbenige driehoek met  $|AB| = |AC| = 13$  en  $|BC| = 10$ .

Een willekeurig punt P op de basis [BC] wordt loodrechte geprojecteerd op de zijden [AB] en [AC] en de punten Q en R zijn de projecties.

- Toon aan dat  $|PQ| + |PR|$  constant is.
- Hoeveel is die constante?

### CONSTANTE 34

De vierkantsvergelijking  $(x - 1)^2 + (3 - 2x) \tan \alpha = 0$  heeft twee verschillende reële oplossingen  $x_1$  en  $x_2$  als  $\alpha \in ]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ .

- Toon aan dat voor alle waarden  $\alpha \in ]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$  de uitdrukking  $(x_1 - 1,5)(x_2 - 1,5)$  constant is.
- Hoeveel is die constante?

### CONSTANTE 35

De rechte met als vergelijking  $y = 4$  snijdt de parabool met als vergelijking  $y = a^2x^2$  ( $a \neq 0$ ) in de punten A en B. De loodrechte projecties van A en B op de x-as zijn de punten A' en B'. Met S duiden we de oppervlakte aan van het parabolosegment bepaald door de rechte  $y = 4$ .

- Toon aan dat de verhouding

$$\frac{S}{\text{oppervlakte rechthoek } ABB'A'}$$

constant is, d.w.z. onafhankelijk van de waarde van  $a$ .

- Hoeveel is die constante?

### CONSTANTE 36

Met  $a$ ,  $b$  en  $c$  duiden we de lengten aan van de drie zwaartelijnen van een rechthoekige driehoek, waarbij  $a \geq b \geq c$ .

- a. Toon aan dat voor elke rechthoekige driehoek geldt dat

$$\frac{a^2 + b^2}{c^2}$$

constant is.

- b. Hoeveel is die constante?

### CONSTANTE 37

$P$  is een willekeurig punt op de parabool met als vergelijking  $y^2 = 16x$  verschillend van de top  $O(0,0)$ .

$Q$  is de loodrechte projectie van  $P$  op de  $x$ -as.

De normaal  $n$  in  $P$  (dit is de loodlijn op de raaklijn  $t$  in  $P$  aan de parabool) snijdt de  $x$ -as in  $R$ .

- a. Toon aan dat de lengte van het lijnstuk  $[QR]$  constant is, d.w.z. onafhankelijk van de keuze van  $P$ .
- b. Hoeveel is die constante?

### CONSTANTE 38

$A(1,2)$ ,  $B(3,-2)$ ,  $C(-1,-2)$  en  $D(-3,2)$  zijn de hoekpunten van een parallellogram.

$P$  is een willekeurig punt op de cirkel met middelpunt  $O(0,0)$  en straal 5.

- a. Toon aan dat  $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$  constant is.
- b. Hoeveel is de constante?

### CONSTANTE 39

De functie  $f$  heeft als voorschrift

$$f(x) = 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x).$$

- a. Toon aan dat  $f$  een constante functie is.
- b. Hoeveel is die constante?

### CONSTANTE 40

Driehoek  $ABC$  is een rechthoekige driehoek met  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $|AB| = 4$  en  $|AC| = 3$ .

$P$  is een willekeurig punt op de zijde  $[AB]$ .

De evenwijdige door  $P$  met  $AC$  snijdt  $BC$  in  $Q$  en de evenwijdige door  $P$  met  $BC$  snijdt  $AC$  in  $R$ .

- a. Toon aan dat  $\sqrt{\text{oppervlakte } \Delta APR} + \sqrt{\text{oppervlakte } \Delta PBQ}$  constant is.
- b. Hoeveel is die constante?